

**TRAVAUX
DIRIGES**

REPRESENTER LA TERRE
Cartographie et navigation

© Casterman – TINTIN – "Le trésor de Rackham Le Rouge"



1

TRIGONOMETRIE :
Calcul du chemin le plus court.

1) Lorsque l'on parcourt 2° le long d'un méridien, quelle est la distance parcourue en km ?
(On prendra pour le rayon terrestre $R = 6380$ km) ?

.....

.....

.....

.....

.....

2) a) Traduire en degrés décimaux la mesure $20^{\circ}37'45''$:

b) Quelle est la longueur du parallèle à $20^{\circ}37'45''$ N ?

c) A la recherche de l'épave de "La Licorne", le capitaine Haddock est allé trop à l'ouest de $2^{\circ}20'$ sur ce même parallèle. De combien de kilomètres le capitaine Haddock s'est-il trompé ?

3) Le chemin le plus court entre deux points d'une sphère est un arc de **grand cercle**.

a) Un grand cercle est, sur la surface du globe, un cercle dont le centre est le centre de la terre.

Quelle est la longueur d'un grand cercle ?

b) Si l'on désigne par C et I les points de la sphère terrestre correspondant à Cherbourg et à l'île au trésor, le chemin le plus court consiste à suivre un arc du cercle passant par C, I et leurs **points antipodaux** (symétriques par rapport au centre de la terre).

On désigne par O le centre de la terre et par α l'angle CÔI.

En prenant comme coordonnées géographiques :

Cherbourg : $49^{\circ}39'N$; $1^{\circ}38'W$ Greenwich ; Ile : $20^{\circ}27'N$; $68^{\circ}32'W$ Greenwich ;

déterminer l'angle α , donné par la formule :

$$\cos \alpha = \sin(\text{lat } C) \times \sin(\text{lat } I) + \sin(\text{lat } C) \times \cos(\text{lat } I) \times \cos(\text{long } C - \text{long } I).$$

c) En déduire la distance (minimale) entre Cherbourg et l'île au trésor.....

2

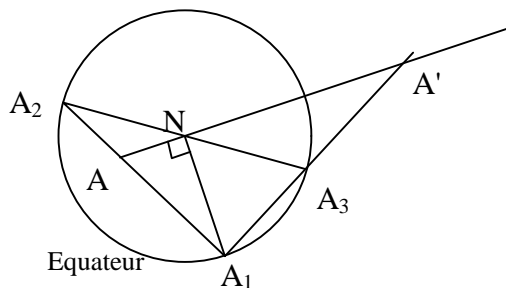
TRACER LE CHEMIN LE PLUS COURT SUR LES CARTES :**⇒ LA CARTE STEREOGRAPHIQUE :**

La projection stéréographique, connue depuis l'Antiquité (Hipparque 150av J.-C.), possède la propriété suivante :

Un cercle dessiné sur la sphère terrestre y est représenté par un cercle sur la carte (sauf s'il passe par le pôle sud, pour une carte centrée sur le pôle nord).

1) Placer, sur la carte stéréographique, les points C et I, correspondant à Cherbourg (Port de départ de Tintin) : $49^{\circ}39'N$; $1^{\circ}38'W$ Greenwich, et Ile au trésor : $20^{\circ}27'N$; $68^{\circ}32'W$ Greenwich.

2) La figure ci-dessous montre comment l'on construit, sur une carte stéréographique, l'**antipodal** d'un point.



Le point A' est, sur la carte stéréographique, l'antipodal du point A (symétrique de A par rapport au centre de la terre).

Décrire comment, à partir du point A, on obtient le point A'.

3) Utiliser cette construction pour placer sur la carte stéréographique, le point I' antipode de I.

Tracer le cercle circonscrit au triangle CII'. On obtient ainsi le plus court chemin entre C et I.

Quelle est, sur cette trajectoire, la latitude du point de 40° de longitude Ouest ?

.....

.....

⇒ LA CARTE DE MERCATOR : Le chemin le plus court n'est pas la ligne droite.

1) Graduer méridiens et parallèles sur la carte de Mercator ci-jointe. Placer les points C et I.

2) Reporter sur la carte de Mercator le point de longitude $40^{\circ}W$ obtenu sur le chemin le plus court entre C et I.

Tracer ensuite le chemin le plus court entre C et I (ce n'est pas un arc de cercle, on l'appelle orthodromie).

3) Comparer avec la ligne droite (CI) tracée sur la carte de Mercator (trajet à cap constant).

CORRIGE

I – TRIGONOMETRIE – Calcul du chemin le plus court :

1) La longueur d'un méridien est :

$$\frac{1}{2} \times 2\pi R \approx \pi \times 6380 \approx \mathbf{20\,043\,km.}$$

Si l'on parcourt 2° sur les 180° d'un méridien, on a fait :

$$20043 \times \frac{2}{180} \approx \mathbf{223\,km.}$$

2) a) On a $20^\circ 37' 42'' \approx \mathbf{20,63^\circ}$.

Si l'on note r le rayon du parallèle de latitude $20,63^\circ$, la trigonométrie dans le triangle rectangle donne:

$$r = R \cos 20,63.$$

La longueur du parallèle à $20,63^\circ$ Nord est donc :

$$2\pi r = 2\pi \times 6380 \times \cos 20,63 \approx \mathbf{37\,516\,km.}$$

b) Pour $2^\circ 20'$ sur ce parallèle, on fait

$$\frac{2,33}{360} \times 37\,516 \approx \mathbf{243\,km.}$$

3) a) On a :

$$\cos \alpha = \sin(49^\circ 39') \times \sin(20^\circ 37') + \sin(49^\circ 39') \times \cos(20^\circ 37') \times \cos(1^\circ 38' - 68^\circ 32')$$

d'où $\cos \alpha \approx 0,548$.

On en déduit que $\alpha \approx \mathbf{56,76^\circ}$.

b) Calcul de la distance (minimale) entre Cherbourg et l'île.

L'arc de cercle CI fait partie d'un grand cercle dont la longueur, comme l'équateur, est $2\pi R$ km.

$$\text{d'où } CI = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi \times 6380 \approx \mathbf{6320\,km.}$$

II – TRACER LE CHEMIN LE PLUS COURT SUR LES CARTES :

⇒ CARTE STEREOGRAPHIQUE

1) Cette question pose le problème du repérage sur la carte stéréographique. L'île au trésor d'Hergé se situe dans les Antilles.

2) Construction de l'antipodal A' du point A :

- A_1 est sur l'équateur avec $(AN) \perp (NA_1)$ (Il y a deux possibilités pour A_1).
- A_2 est sur l'équateur, dans l'alignement de A_1 et de A.
- A_3 est le point de l'équateur diamétralement opposé à A_2 .
- A' est à l'intersection de (AN) et (A_1A_3) .

3) Construction sur la carte

stéréographique :

l'arc de cercle correspondant au chemin le plus court passe approximativement par le point de coordonnées $40^\circ W$ et $40^\circ N$.

⇒ CARTE DE MERCATOR

1) Sur un même méridien, les parallèles sont, sur un globe, régulièrement espacés tous les 10° par exemple. Ce n'est pas le cas sur la carte de Mercator.

2) L'orthodromie (chemin le plus court) n'est pas une ligne droite sur la carte de Mercator, pas plus qu'un arc de cercle. On en obtient le tracé "point par point" à partir du tracé obtenu sur la carte stéréographique.

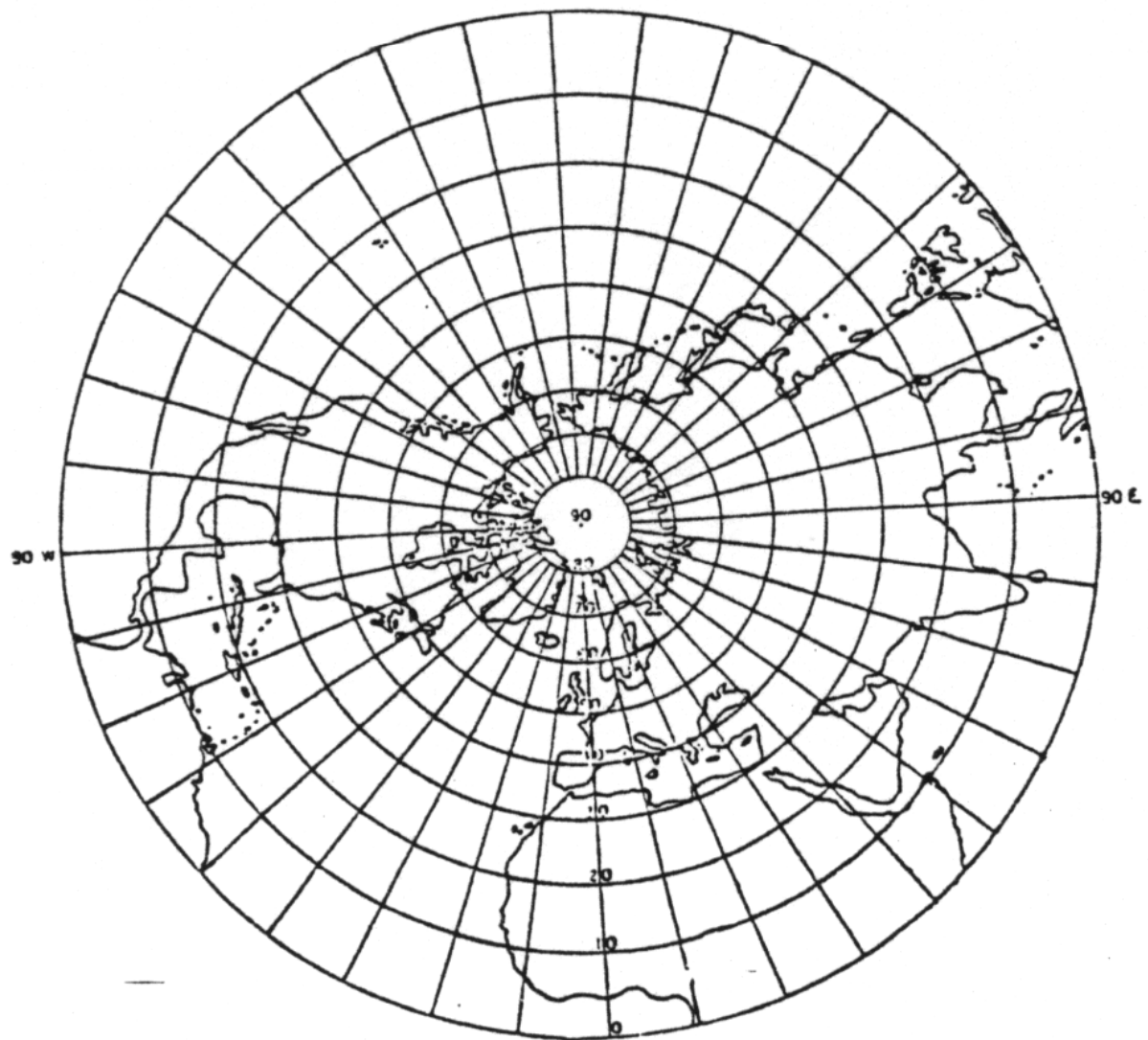
3) La ligne droite correspond, sur la carte de Mercator, à un trajet à cap constant (loxodromie). C'est ce qui explique son grand intérêt pour la navigation (à la boussole).

En revanche l'intérêt de la projection stéréographique est le tracé (un simple arc de cercle) du chemin le plus court.

REFERENCES

J. LUBCZANSKI : Activité parue chez CEDIC (épuisé).
Revue Inter-IREM "REPERES".

PROJECTION STEREOGRAPHIQUE



PROJECTION DE MERCATOR

