

Exercices : Satellites CORRECTION

I) PERIODES DE REVOLUTION

Données :

Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $T_T = 1,00 \text{ an}$, $r_T = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$ (rayon de l'orbite).

Saturne : $r_S = 1,43 \times 10^9 \text{ km}$ Jupiter : $r_J = 7,78 \times 10^8 \text{ km}$

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$

1) D'après la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{r^3} = \text{constante}$

On a donc :

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_J^2}{r_J^3} \quad T_J = \sqrt{\frac{T_T^2}{r_T^3} \times r_J^3} = 11,8 \text{ ans}$$

Pour Saturne, on trouve : 29,4 ans. On remarque qu'il est inutile de convertir les unités en SI si elles sont cohérentes entre elles.

2) La difficulté dans ce calcul est de convertir les distances en m et le temps en s (SI). Pour T et r, on choisit les valeurs de n'importe quelle planète. Ici, on a choisi la Terre :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}, \text{ donc : } M_S = \frac{4\pi^2 \times R^3}{G \times T^2} = \frac{4\pi^2 \times (1,50 \times 10^{11})^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (60 \times 60 \times 24 \times 365,25)^2} = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$$

II. UN TROU NOIR AU CENTRE DE LA GALAXIE

1. Mise en évidence de l'existence du trou noir.

L'énoncé de la première loi de Kepler, appelée aussi loi des orbites, est « Dans un référentiel **héliocentrique**, la trajectoire du centre d'une planète est une **ellipse** dont le centre du Soleil est l'un des foyers. »

On peut l'adapter à la situation présentée ici : « Dans le référentiel du trou noir, la trajectoire du centre de l'étoile S_2 est une **ellipse** dont le centre du trou noir est l'un des foyers. »

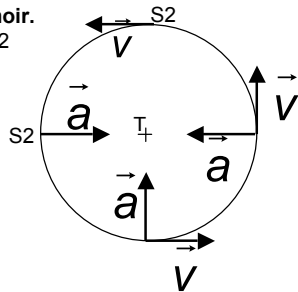
Ainsi la forme elliptique de la trajectoire de l'étoile S_2 a permis de justifier l'existence d'un trou noir au centre de la Galaxie.

2. Estimation de la masse du trou noir.

2.1. Trajectoire simplifiée de l'étoile S_2

T = Trou noir

Rayon de la trajectoire $S_2T = r$



2.2. On se situe ici dans l'approximation circulaire :

On applique la deuxième loi de Newton au système {étoile S_2 } de masse m dans le référentiel du trou noir supposé galiléen.

On considère que l'étoile S_2 est soumise uniquement à la force d'attraction gravitationnelle du trou noir notée \vec{F}_{T/S_2} .

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{T/S_2} = G \times \frac{m \times M}{r^2} \times \vec{u}_n \quad (\text{ce vecteur unitaire est dirigé vers T})$$

Or, d'après la seconde loi de Newton : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}$

$$\text{Donc : } m \times \vec{a} = G \times \frac{m \times M}{r^2} \times \vec{u}_n \quad \text{et : } \vec{a} = G \times \frac{M}{r^2} \times \vec{u}_n$$

L'accélération est donc centripète. On en déduit que dans la base de Frénet : $a_r = \frac{dv}{dt} = 0$, le

mouvement est uniforme et que : $a_n = \frac{v^2}{r}$

$$\frac{v^2}{r} = G \times \frac{M}{r^2}$$

On retrouve l'expression proposée : $v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}$.

2.3. L'étoile S_2 parcourt son orbite de longueur $L = 2\pi \cdot r$ en une durée de révolution :

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \quad \text{donc } T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \times r}{\sqrt{\frac{G \times M}{r}}} \quad \text{donc : } T = 2\pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \times M}}$$

$$2.4. T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M} \quad \text{donc } M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

Il faut convertir les heures-lumière en mètres et la période en secondes.

$$M = \frac{4\pi^2 \times (132 \times 3600 \times 3,00 \times 10^8)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (15,2 \times 365,25 \times 24 \times 3600)^2} = 7,45 \times 10^{36} \text{ kg}$$

Le document 1 annonce que le trou noir a une masse de 3 à 4 millions de masse solaire.

$$\text{Calculons le rapport } \frac{M}{M_S} = \frac{7,4530112555 \times 10^{36}}{2,0 \times 10^{30}} = 3,7 \times 10^6$$

La valeur de la masse M du trou noir est cohérente puisqu'elle vaut 3,7 millions de fois la masse solaire.

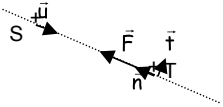
III. SATURNE ET TITAN

1- Quelques caractéristiques de Titan :

1.1 Forces

1.1.1 Titan subit la force d'interaction gravitationnelle exercée par Saturne.

1.1.2
$$1.1.3 \quad \vec{F}_{S/T} = G \times \frac{M_T \times M_S}{r^2} \times \vec{u}_n$$



1.2 Accélération et vitesse.

1.2.1 D'après la **seconde loi de Newton**, appliquée à Titan, réduit à son centre d'inertie T, dans le référentiel saturno-centrique : $\Sigma \vec{F}_{ext} = M_T \times \vec{a}$

Donc : $M_T \times \vec{a} = G \times \frac{M_T \times M_S}{R_T^2} \times \vec{u}_n$ et : $\vec{a} = G \times \frac{M_S}{R_T^2} \times \vec{u}_n$ (l'accélération est centripète).

1.2.2 Dans la base de Frénet, on peut écrire :

$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ et } a_n = \frac{v^2}{R_T}$$

1.2.3 La force \vec{F} est **centripète** dirigée vers Saturne, le vecteur accélération est donc lui aussi **centripète** puisque les deux vecteurs sont colinéaires. Il se réduit donc à la composante normale.

1.3 Type de mouvement

1.3.1 Le vecteur accélération de Titan étant normal on a donc $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, la valeur de la vitesse v de Titan est donc constante. Le mouvement de Titan autour de Saturne est uniforme.

1.3.2 $a = G \times \frac{M_S}{R_T^2}$ et $a_n = \frac{v^2}{R_T}$ donc : $\frac{v^2}{R_T} = G \times \frac{M_S}{R_T^2}$ et : $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R_T}}$

2- D'autres satellites de Saturne :

2.1.1 Loi de Kepler

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \text{ donc : } T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \times R}{\sqrt{\frac{G \times M}{R}}} \text{ on élève cette expression au carré : } T^2 = 4\pi^2 \times \frac{R^3}{G \times M_S} \text{ et : } \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}$$

Remarque : la question n'est pas très bien formulée. On peut seulement dire que le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ est constant, et qu'on retrouve ainsi la loi de Képler dans l'approximation circulaire.

2.1.2 Ce rapport étant constant pour tous les satellites de Saturne, on peut écrire : $\frac{T_E^2}{R_E^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}$ donc :

$$R_E^3 = \frac{G \times M_S}{4\pi^2} \times T_E^2 \text{ donc : } R_E = \sqrt[3]{\frac{G \times M_S}{4\pi^2} \times T_E^2}$$

$$\text{Soit : } R_E = \sqrt[3]{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,69 \times 10^{26}}{4\pi^2} \times (1,37 \times 3600 \times 24)^2} = 2,38 \times 10^8 \text{ m}$$

3- Satellite saturno-stationnaire

3.1 Un satellite saturno-stationnaire reste à la verticale du même point. Sa période de révolution est donc égale à la durée d'un jour sur Saturne. $T_C = T_S$.

3.2 Altitude de la sonde

3.2.1. On a vu à la question 2.1.2 que pour tous les satellites de Saturne: $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}$ et que donc :

$R = \sqrt[3]{\frac{G \times M_S}{4\pi^2} \times T^2}$. Appliquons cette formule à la sonde Cassini : $R_C = \sqrt[3]{\frac{G \times M_S}{4\pi^2} \times T_C^2}$ où R_C est le rayon de l'orbite de la sonde Cassini.

Or $R_C = R_S + h$ et $T_C = T_S$ donc : $h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_S}{4\pi^2} \cdot T_S^2} - R_S$ (puisque $T_C = T_S$).

3.2.2. $h = \sqrt[3]{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,69 \times 10^{26}}{4\pi^2} \times (10 \times 3600 + 39 \times 60)^2} - 6,0 \times 10^7 = 5,2 \times 10^7 \text{ m}$

Pensez à convertir T_S en secondes, R_S en m.