Satellites et champs électrique CORRECTION

I) PERIODES DE REVOLUTION

Données :
Terre : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,kg$, $T_T = 1{,}00\,an$, $r_T = 1{,}50 \times 10^{8}\,km$ (rayon de l´orbite).
Saturne : $r_S = 1{,}43 \times 10^{9}\,km$ Jupiter : $r_J = 7{,}78 \times 10^{8}\,km$
G= $6{,}67 \times 10^{-11}$ SI

1) D´après la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{r^3} = constante$

On a donc :
$\frac{T_T^{\,2}}{r_T^{\,3}} = \frac{T_J^{\,2}}{r_J^{\,3}}$ $T_J = \sqrt{\frac{T_T^{\,2}}{r_T^{\,3}} \times r_J^{\,3}} = 11{,}81\,ans$

Pour Saturne on trouve : 29,43 ans. On remarque qu´il est inutile de convertir les unités en SI.

2)
La difficulté dans ce calcul est de convertir les distances en m et le temps en s (SI). Pour T et r, on choisit les valeurs de n´importe quelle planète. Ici, on a choisi la Terre :
$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}$, donc : $M_S = \frac{4\pi^2 \times R^3}{G \times T^2} = \frac{4\pi^2 \times (1{,}50 \times 10^{11})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (60 \times 60 \times 24 \times 365{,}25)^2} = 2{,}00 \times 10^{30}\,kg$

II. UN TROU NOIR AU CENTRE DE LA GALAXIE *(d´après Labolycée)*

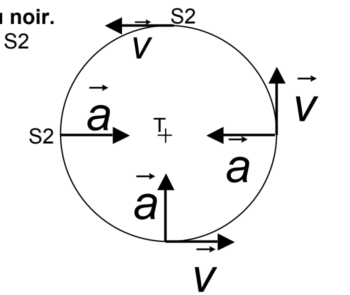
1. Mise en évidence de l'existence du trou noir.

L'énoncé de la première loi de Kepler, appelée aussi loi des orbites, est « Dans un référentiel **héliocentrique**, la trajectoire du centre d'une planète est une **ellipse** dont le centre du Soleil est l'un des foyers. »
On peut l'adapter à la situation présentée ici : « Dans le référentiel du trou noir, la trajectoire du centre de l'étoile S_2 est une **ellipse** dont le centre du trou noir est l'un des foyers. »
Ainsi la forme elliptique de la trajectoire de l'étoile S2 a permis de justifier l'existence d'un trou noir au centre de la Galaxie.

2. Estimation de la masse du trou noir.
2.1. Trajectoire simplifiée de l'étoile S2

T = Trou noir

Rayon de la trajectoire S2T = *r*



2.2. En utilisant la deuxième loi de Kepler « Le rayon vecteur $\overrightarrow{S2T}$ orienté du trou noir T à l'étoile S2 balaye des **surfaces égales** pendant des **intervalles de temps égaux** », on démontre que ce mouvement circulaire se produit à vitesse constante *v*.

Dans ce cas le vecteur accélération de l'étoile S2 a pour expression $\vec{a} = \frac{v^2}{r}.\vec{n}$

On applique la deuxième loi de Newton au système {étoile S2} de masse *m* dans le référentiel du trou noir supposé galiléen.
On considère que l'étoile S2 est soumise uniquement à la force d'attraction gravitationnelle du trou noir notée $\vec{F}$.

$\vec{F} = m.\vec{a}$
$G.\frac{M.m}{r^2}.\vec{n} = m\,.\,\frac{v^2}{r}.\vec{n}$
Alors $G.\frac{M.m}{r^2} = m\,.\,\frac{v^2}{r}$
$G.\frac{M}{r} = v^2$

On retrouve l'expression proposée : $v = \sqrt{G.\frac{M}{r}}$.

2.3. L'étoile S2 parcourt son orbite de longueur L = 2π.r en une durée de révolution T.
$v = \frac{2\pi.r}{T}$ donc $T = \frac{2\pi.r}{v}$
$T^2 = \frac{4\pi^2.r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2.r^2}{\frac{G.M}{r}} = \frac{4\pi^2.r^3}{G.M}$

$T = 2\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M}}$

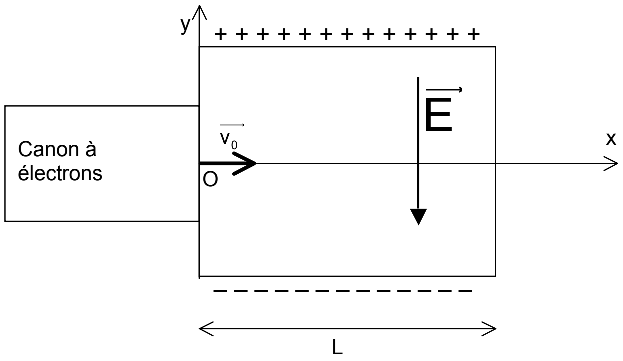
2.4. $T^2 = \frac{4\pi^2.r^3}{G.M}$ donc $M = \frac{4\pi^2.r^3}{G.T^2}$
Il faut convertir les heures-lumière en mètres et la période en secondes.
$M = \frac{4\pi^2 \times (132 \times 3600 \times 3{,}00 \times 10^8)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (15{,}2 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600)^2} = 7{,}45 \times 10^{36}$ kg

Le document 1 annonce que le trou noir a une masse de 3 à 4 millions de masse solaire.
Calculons le rapport $\frac{M}{M_S} = \frac{7{,}4530112555 \times 10^{36}}{2{,}0 \times 10^{30}} = 3{,}7 \times 10^6$
La valeur de la masse *M* du trou noir est cohérente puisqu'elle vaut 3,7 millions de fois la masse solaire.

III) LA CHARGE DE L'ELECTRON *(d´après Labolycée)*

1. Détermination du caractère négatif de la charge de l'électron par J.J.Thomson.
1.1. D'après l'échelle de 1,0 cm pour 5,0 kV.m^{-1}, et comme E = 15,0 kV.m^{-1}, on en déduit que $\vec{E}$ sera représenté par une flèche de 3,0 cm.

Annexe 5



1.2. *(Lire la question suivante avant de répondre)* Le document 4 indique que des particules de charges opposées s'attirent. Le faisceau d'électrons étant attiré par la plaque chargée positivement, c'est que les électrons sont porteurs d'une charge négative.

1.3. $\vec{F} = -e.\vec{E}$
Entre les plaques, l'électron n'est soumis qu'à la force électrostatique qui le dévie vers la plaque chargée positivement. Cette force est donc de sens opposé au champ électrostatique, et comme $\vec{F} = q.\vec{E}$, cela impose que q < 0.

2. Détermination du rapport e/m pour l'électron.
2.1. On applique la deuxième loi de Newton au système électron, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\Sigma\vec{F} = m \times \vec{a}$$

$-e.\vec{E} = m.\vec{a}$ donc $\vec{a} = \dfrac{-e.\vec{E}}{m}$ Le vecteur accélération est de sens opposé au vecteur champ $\vec{E}$.

Par projection suivant les axes du repère défini dans le document 5, on obtient $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{e.E}{m} \end{cases}$

2.2.1. y(x=L) = h

$$h = \frac{e.E}{2.m.v_0^2}.L^2$$

$$\frac{e}{m} = \frac{2.v_0^2.h}{E.L^2}$$

2.2.2. $\dfrac{e}{m} = \dfrac{2 \times \left(2,27 \times 10^7\right)^2 \times 1,85 \times 10^{-2}}{15,0 \times 10^3 \times \left(8,50 \times 10^{-2}\right)^2} = 1,76 \times 10^{11}\ \text{C.kg}^{-1}$

2.2.3. (0,5 pt) $U\left(\dfrac{e}{m}\right) = \dfrac{e}{m}.\sqrt{\left[\left(\dfrac{U(h)}{h}\right)^2 + \left(\dfrac{U(E)}{E}\right)^2 + 4\left(\dfrac{U(v_0)}{v_0}\right)^2 + 4\left(\dfrac{U(L)}{L}\right)^2\right]}$

$$U\left(\frac{e}{m}\right) = 1,76 \times 10^{11} \times \sqrt{\left[\left(\frac{0,05}{1,85}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{15,0}\right)^2 + 4\left(\frac{0,02}{2,27}\right)^2 + 4\left(\frac{0,05}{8,50}\right)^2\right]}$$

$$U\left(\frac{e}{m}\right) = 6 \times 10^9\ \text{C.kg}^{-1} = 0,06 \times 10^{11}\ \text{C.kg}^{-1}$$

On ne conserve qu'un seul chiffre significatif pour l'incertitude

$$\frac{e}{m} = (1,76 \pm 0,06) \times 10^{11}\ \text{C.kg}^{-1}$$