Exercices : Satellites

I) PERIODES DE REVOLUTION

1) A l´aide de la troisième loi de Képler et des données, déterminez la période de révolution de Jupiter et de Saturne.
2) Dans l´approximation circulaire, on a montré que: $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}$. En déduire une estimation de la masse du soleil.

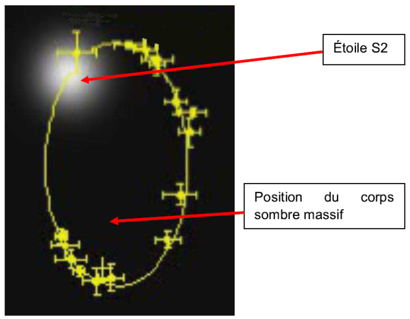
Données :
Terre : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,kg$, $T_T = 1{,}00\,an$, $r_T = 1{,}50 \times 10^8\,km$ (rayon de l´orbite).
Saturne : $r_S = 1{,}43 \times 10^9\,km$ Jupiter : $r_J = 7{,}78 \times 10^8\,km$
G= $6{,}67 \times 10^{-11}$SI

II) UN TROU NOIR AU CENTRE DE LA GALAXIE (extrait de bac)

Document : Un trou noir massif au centre de la galaxie.

Depuis plusieurs années les astronomes tournent le regard vers le centre de notre galaxie, soupçonné d'abriter un trou noir extrêmement massif. C'est une technique nouvelle, l'optique adaptative, qui a permis une percée décisive dans ce domaine de recherche. La finesse des images obtenues sur le Very Large Télescope (au Chili), a rendu possible la détermination des orbites d'étoiles appartenant à un amas très dense autour du centre galactique. L'orbite d'une étoile particulière a permis de démontrer l'existence d'un trou noir de 3 à 4 millions de masses solaires.

La traque du trou noir en infrarouge.
Certaines étoiles très proches du centre galactique sont suivies depuis plusieurs années par une équipe internationale.
Les premières mesures ont révélé que ces étoiles décrivent des trajectoires elliptiques, ce qui implique effectivement qu'un objet sombre de plusieurs millions de masses solaires doit résider dans un volume très petit au centre de la galaxie. Il s'agissait là d'un premier résultat important.
La chance a voulu que d'une part l'une des étoiles surveillées - dénommée S2 - est passée au plus proche du centre de masse durant cette période et que, d'autre part, cette approche s'est faite à une distance remarquablement petite : seulement 17 heures-lumière.
Le fait que la trajectoire soit restée purement képlérienne(1) a ainsi permis d'éliminer définitivement toute possibilité que la masse de quelques millions de masses solaires soit sous forme d'un amas dense stellaire sombre. En effet la taille de toutes ces structures est bien plus grande que les 17 heures-lumière de la distance d'approche. Seule reste la possibilité du trou noir très massif.



Données numériques :

Constante de gravitation universelle :
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3.s^{-2}.kg^{-1}$

Masse du soleil :
$M_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg

Célérité de la lumière dans le vide :
$c = 3{,}00 \times 10^8\ m.s^{-1}$

Une heure-lumière est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une heure.

(1) Képlérienne : qui suit les lois de Kepler.

1. Mise en évidence de l'existence du trou noir.

Énoncer la première loi de Kepler et, à partir de celle-ci, expliquer comment la détermination de la trajectoire de l'étoile S2 a permis de justifier l'existence d'un trou noir très massif au centre de la galaxie.

2. Estimation de la masse du trou noir.

Pour déterminer un ordre de grandeur de la masse *M* du trou noir, on considère dans cette question que l'étoile S2, de masse *m,* décrit une orbite circulaire de rayon *r* = 132 heures-lumière, la période de révolution étant *T* = 15,2 ans.

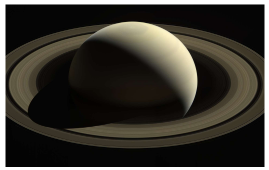
2.1 Schématiser la trajectoire de l'étoile S2 et représenter, en plusieurs points de la trajectoire, l'étoile, son vecteur vitesse, son vecteur accélération.

2.2 Montrer que la valeur *v* de la vitesse de l'étoile S2 a pour expression : $v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$.

2.3 En déduire l'expression de la période de révolution *T* de l'étoile.

2.4 Déterminer la valeur de la masse *M* du trou noir et la comparer à celle annoncée dans le document 1.

III) SATURNE ET TITAN (d´après bac)



En Juillet 2004, la sonde européenne Cassini-Huygens nous a livré ses premiers clichés des anneaux de Saturne. Elle a également photographié Titan, le plus gros satellite de Saturne, situé à une distance R_T de Saturne. L'excentricité orbitale des satellites étant très faible, on supposera leurs trajectoires circulaires.
Dans tout l'exercice, on se place dans le référentiel saturno-centrique, centré sur Saturne et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes.
On considère que la planète Saturne et ses satellites sont des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique. Les rayons des orbites des satellites sont supposés grands devant leur taille.

<u>**Données :**</u> G = $6{,}67\times10^{-11}$ S.I. : constante de gravitation universelle.

Concernant Titan : $R_T = 1{,}22\times10^6$ km (rayon de l'orbite de Titan).

Concernant Saturne : $R_S = 6{,}0\times10^4$ km (rayon de la planète Saturne). Ts = 10 h 39 min (période de rotation de Saturne sur elle-même). $M_S = 5{,}69\times10^{26}$ kg (masse de Saturne).

1. <u>Quelques caractéristiques de Titan :</u>

Soit $\vec{u}_n$ le vecteur unitaire porté par la droite ST dirigé de T vers S.

1.1. <u>Forces</u>
On considère que la seule force gravitationnelle exercée sur Titan provient de Saturne.

1.1.1. Nommer la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) au satellite Titan, de masse M_T.
1.1.2. Représenter qualitativement sur un schéma, Saturne, Titan, et la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) sur Titan.
1.1.3. Donner l'expression vectorielle de cette (ces) force(s).

1.2. Accélération et vitesse
On étudie le mouvement du centre d'inertie T de Titan. S est le centre d'inertie de Saturne.

1.2.1. Exprimer son accélération vectorielle $\vec{a}$ en précisant la loi utilisée.
1.2.2. On se place dans la base de Frénet ($\vec{u}_t$, $\vec{u}_n$) centrée en T dans laquelle $\vec{u}_t$ est un vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement et $\vec{u}_n$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.

Donner les expressions littérales de a_t et de a_n en fonction de la vitesse v du satellite.

1.2.3. À quelle composante se réduit l'accélération vectorielle $\vec{a}$ de Titan dans la base de Frénet? Compléter alors le schéma précédent, avec la base orthonormée ($\vec{u}_t$, $\vec{u}_n$) et l'accélération $\vec{a}$ de Titan.

1.3. Type de mouvement

1.3.1. Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

1.3.2. Retrouver l'expression de la vitesse de Titan sur son orbite autour de Saturne : $v = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_T}}$

2. D'autres satellites de Saturne :
Après le survol de Titan, la sonde Cassini a survolé le satellite Encelade en février 2005.
On peut considérer que dans le référentiel saturno-centrique, Encelade à un mouvement de révolution circulaire uniforme, dont la période (en jour terrestre), est $T_E = 1{,}37$ et le rayon est R_E.

2.1. Loi de Kepler
La relation qui lie la période T de révolution d'un satellite, sa vitesse v et le rayon R de son orbite est :
$T = \dfrac{2\pi R}{v}$. Sa vitesse de révolution autour de Saturne est donnée par : $v = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R}}$.

2.1.1. Retrouver la troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}$.

2.1.2. Utiliser la troisième loi de Kepler pour déterminer la valeur du rayon R_E de l'orbite d'Encelade.

3. Sonde saturno-stationnaire :
On cherche dans cette partie à déterminer l'altitude h à laquelle devrait se trouver la sonde Cassini pour être saturno-stationnaire (immobile au-dessus d'un point de l'équateur de Saturne).

3.1. Quelle condition doit-on avoir sur les périodes Ts (rotation de Saturne sur elle-même) et Tc (révolution de Cassini autour de Saturne) pour que la sonde soit « saturno-stationnaire »?

3.2. Altitude de la sonde

3.2.1. En utilisant la troisième loi de Kepler donnée à la question **2.1.1.** , montrer que l'altitude h de la sonde peut se calculer avec la relation: $h = \sqrt[3]{\dfrac{T_C^2 GM_S}{4\pi^2}} - R_S$

3.2.2. Calculer la valeur de h.