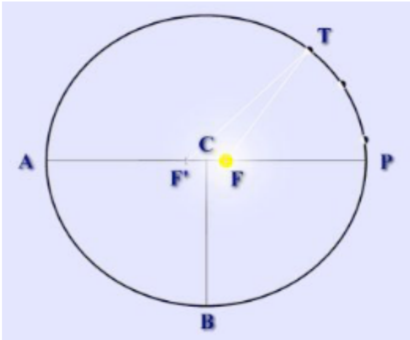
LOIS DE KEPLER ET DE NEWTON
SATELLITES

I) LES TROIS LOIS DE KEPLER

PREMIERE LOI (1609)**:**

Les planètes orbitent autour du Soleil en suivant une trajectoire en forme d´ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

F et F' : les deux foyers de l'ellipse. Le Soleil est en F.
C : Centre géométrique de l'ellipse
P : Périhélie A : Aphélie
T : Terre comme exemple
Deux grandeurs définissent la forme de l'ellipse : son demi grand axe : AC ou CP = a et son excentricité : e = CF / a

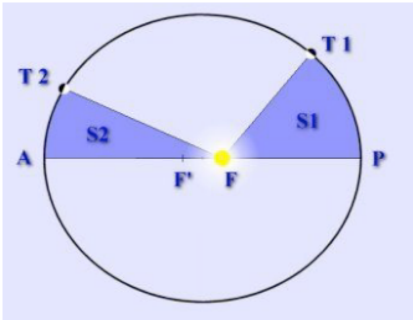


DEUXIEME LOI (loi des aires)**:**

Les planètes balayent des aires égales en des temps égaux.

Cette loi traduit la variation de la vitesse sur l´ellipse. La planète se déplace plus rapidement

Remarque: si la trajectoire est un cercle, la vitesse de la planète est constante.



TROISIEME LOI (1618)**:**

Pour toutes les planètes, le rapport du carré des périodes de révolution au cube du demi grand axe de l'orbite est constant.

Période de révolution de la planète

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

Ce nombre est le même pour toutes les planètes du système solaire

demi grand axe de l´ellipse

Remarques :
- Le demi grand axe (AC sur le premier schéma) devient le rayon de l´orbite si celle-ci est un cercle.
- Il n´est pas obligatoire de convertir T en secondes et a en mètres. Il suffit que les unités soient cohérentes entre elles.

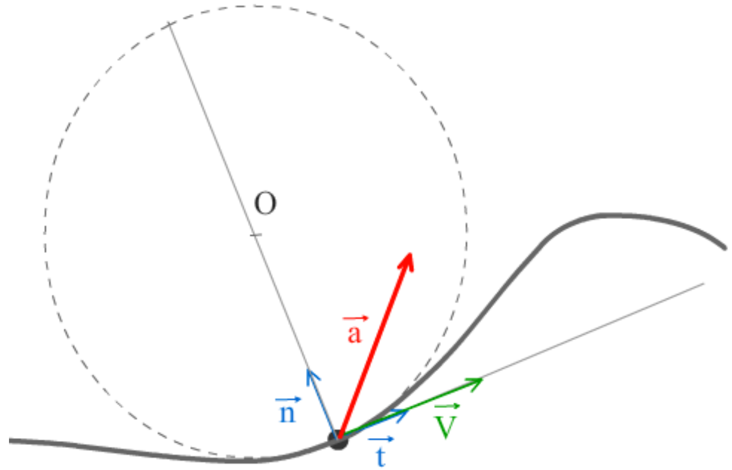
✐ **APPLICATION: FAIRE LE PREMIER EXERCICE DE LA FEUILLE.**

II) LES LOIS DE NEWTON APPLIQUEES AUX ORBITES CIRCULAIRES

1) La base de Frénet: Comment décrire le mouvement d´un objet sur une trajectoire curviligne?

L´objet noir représenté sur le schéma ci-dessous suit une trajectoire curviligne. On définit la base de FRENET par son centre (la position de l´objet), le vecteur unitaire $\vec{t}$ tangent à la trajectoire et le vecteur $\vec{n}$ perpendiculaire et dirigé vers le point O, le centre du rayon de courbure (cercle pointillé de rayon r).

Remarque: Les vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{n}$ sont parfois appelés $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$



On remarque immédiatement que le vecteur vitesse $\vec{V}$ est tangent à la trajectoire et donc colinéaire à $\vec{t}$
Le vecteur accélération n´étant pas encore connu, il est dessiné ici "au hasard".

Expression du vecteur vitesse dans la base de FRENET:

$$\vec{V}\begin{vmatrix} V_t = V \\ V_n = 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{V}$ est colinéaire à $\vec{t}$

$\vec{V}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$

Expression du vecteur accélération dans la base de FRENET:

$$\vec{a}\left|\begin{aligned} a_t &= \frac{dV}{dt} \\ a_n &= \frac{V^2}{r} \end{aligned}\right.$$

r est le rayon du cercle pointillé

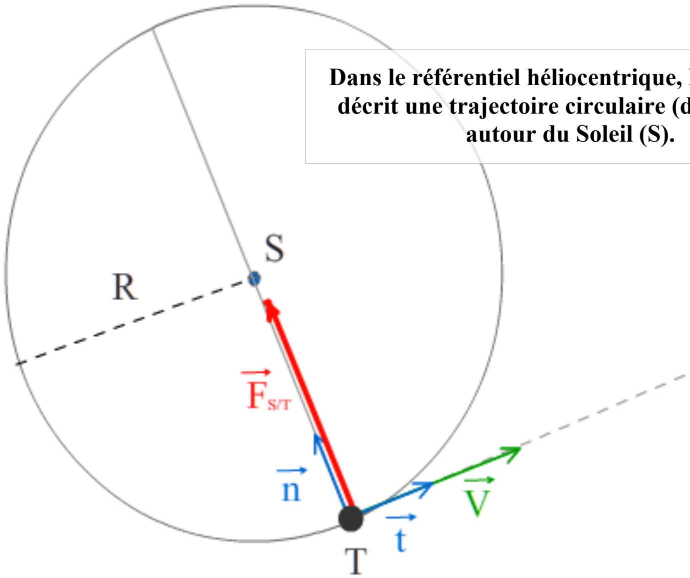
Nous ne démontrerons pas ces deux expressions établies par le mathématicien Jean Frédéric FRENET. On se contente de les retenir.

La base de FRENET va grandement faciliter l´étude du mouvement des planètes dans le cadre de la deuxième loi de NEWTON que nous allons réaliser maintenant...

2) <u>Référentiel et bilan des forces:</u> Comment décrire le mouvement d´un objet sur une trajectoire curviligne?

Dans cette étude, nous prendrons l´exemple du mouvement de la Terre autour du Soleil que nous considérerons **toujours comme circulaire**.

Dans le référentiel héliocentrique, la Terre (T) décrit une trajectoire circulaire (de rayon R) autour du Soleil (S).



Bilan des forces: La Terre de masse M_T n´est soumise qu´à la force gravitationnelle $\vec{F}_{S/T}$ que le Soleil de masse M_S exerce sur elle. Cette force attractive est représentée sur le schéma. Remarquons tout de suite qu´elle est colinéaire à $\vec{n}$.

Cette force étudiée en classe de seconde s´écrit vectoriellement:

$$\vec{F}_{S/T} = G \times \frac{M_S \times M_T}{R^2} \times \vec{n}$$

G est la constante de gravitation universelle: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

2) <u>Expression de l´accélération:</u>

Dans le référentiel héliocentrique, on peut appliquer la **deuxième loi de Newton** à la Terre:

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = M_T \times \vec{a} = \vec{F}_{S/T} \text{ donc : } \cancel{M_T} \times \vec{a} = G \times \frac{M_S \times \cancel{M_T}}{R^2} \times \vec{n}.$$

On a : $\vec{a} = G \times \dfrac{M_S}{R^2} \times \vec{n}$

Première conséquence:
On remarque tout de suite que le vecteur accélération de la Terre est <u>colinéaire à $\vec{n}$</u> (vous pouvez le représenter sur le schéma). Il est donc toujours dirigé vers le Soleil, on dit qu´il est **<u>centripète.</u>**

Or, dans la base de FRENET, le vecteur accélération s´écrit: $\vec{a}\left|\begin{aligned} a_t &= \frac{dV}{dt} \\ a_n &= \frac{V^2}{R} \end{aligned}\right.$

Comme l´accélération est centripète : a_t=0 donc :

$$a_t = \frac{dV}{dt} = 0$$

Conséquence: La norme du vecteur vitesse de la Terre (V) est constante donc le mouvement est uniforme.

L´accélération de la Terre s´écrit donc: $a = a_n = \dfrac{V^2}{R}$

3) <u>Expression de la vitesse de la Terre sur son orbite:</u>

Nous venons de voir que l´accélération étant centripète, elle se réduit à sa composante normale : $a = a_n = \frac{V^2}{R}$

Or, la norme du vecteur accélération s´écrit: $a = G \times \frac{M_S}{R^2}$ (n est un vecteur de norme 1, on peut "enlever les flèches").

Donc : $\frac{V^2}{R} = G \times \frac{M_S}{R^2}$ on trouve après simplification: $V = \sqrt{\frac{G \times Ms}{R}}$

> ✎ **APPLICATION:** Montrez que la vitesse de la Terre sur son orbite est d´environ 30km/s
> $M_S = 2{,}0 \times 10^{30} kg$, $R = 1{,}50 \times 10^8 km$ (rayon de l´orbite à convertir en mètre!).
> G=$6{,}67 \times 10^{-11}$SI
>
> Correction:
> $$V = \sqrt{\frac{G \times Ms}{R}}$$
> $$V = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 2{,}0 \times 10^{30}}{1{,}5 \times 10^{11}}} = 3{,}0 \times 10^4 m/s$$
> Soit environ 30km/s

4) <u>Expression de la période de révolution de la Terre:</u>

La vitesse de la Terre sur son orbite étant constante, elle est égale à la distance à parcourir pour faire un tour (le périmètre du cercle: $2\Pi \times R$) divisée par le temps pour faire un tour (T, la période que nous cherchons), on peut donc écrire:

$V = \frac{2\Pi \times R}{T}$ donc la période s´écrit: $T = \frac{2\Pi \times R}{V}$

On remplace par l´expression de V trouvé plus haut (essayez de le faire vous même!):
$$T = \frac{2\Pi \times R}{\sqrt{G \times Ms}} \times \sqrt{R}$$

Ce qui donne après simplification:

$$T = 2\Pi \times \sqrt{\frac{R^3}{G \times Ms}}$$

Dans cette simplification, il est important de remarquer que: $R \times \sqrt{R} = \sqrt{R^3}$

Rappelons-nous que la racine carrée est égale à la puissance ½:

$$R \times R^{\frac{1}{2}} = R^{1+\frac{1}{2}} = R^{\frac{3}{2}} = \sqrt{R^3}$$

> ✎ **APPLICATION:** Montrez que la période de révolution de la Terre est d´un an.
> $M_S = 2{,}0 \times 10^{30} kg$, $R = 1{,}50 \times 10^8 km$ (Rayon de l´orbite à convertir en mètre!).
> G=$6{,}67 \times 10^{-11}$SI
>
> Correction:
> $$T = 2\Pi \times \sqrt{\frac{R^3}{G \times Ms}}$$
> $$T = 2\Pi \times \sqrt{\frac{(1{,}5 \times 10^{11})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 2{,}0 \times 10^{3}}} = 3{,}2 \times 10^7 s$$
>
> Ceci correspond bien au nombre de secondes dans une année terrestre:
> $60 \times 60 \times 24 \times 365$

Dernière remarque d´importance!

En élevant l´expression de la période au carré on a: $T^2 = \frac{4\Pi^2 \times R^3}{G \times Ms}$

Qui peut s´écrire: $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$

Que remarque-t-on? Cette expression est constante puisque G et Ms sont des constantes.

On peut donc affirmer que **le rapport du carré de la période de révolution au cube du rayon de l'orbite est constant.**

> **Cela ne vous rappelle rien? La deuxième loi de Newton nous a permis de démontrer la troisième loi de Kepler** (dans le cas des orbites circulaires)**!**

✎ **APPLICATIONS: FAIRE LES DEUX AUTRES EXERCICES (BAC) DE LA FEUILLE**