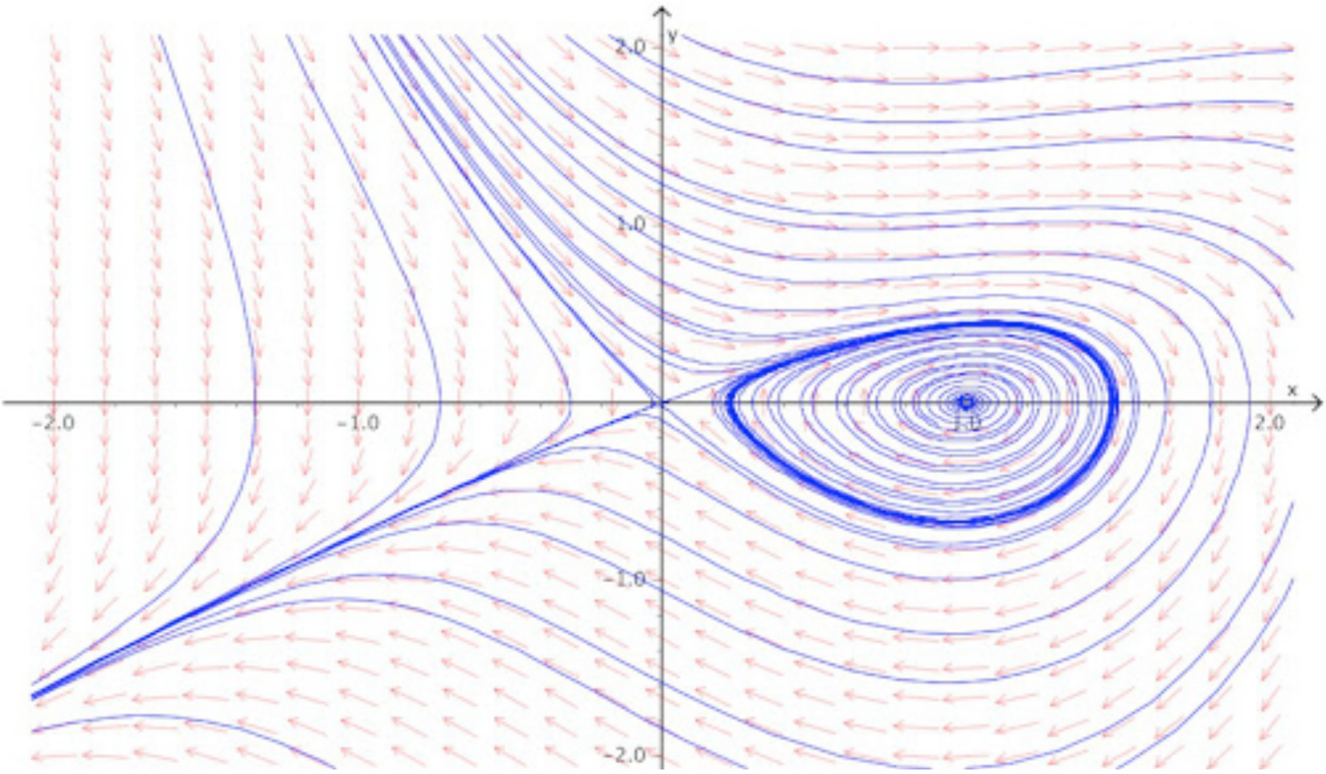


EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Comment résoudre une équation dont l´inconnue est une fonction?

L´équation **y' = ay + b** est une équation différentielle du **premier ordre** dont les coefficient a et b sont constants. Elle admet une solution qui est une fonction y=f(t) que l´on doit déterminer.

Nous allons voir ici la technique de résolution et l'intérêt qu´elle présente en physique et en chimie.

Attention, comme nous sommes en physique, la variable de la fonction f ne sera pas appelée x comme en Mathématiques mais t comme le temps.

PREMIERE PARTIE: RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE **y' = b** (a=0 et b est un réel)

Notons que cette équation peut s´écrire sous différentes formes équivalentes:

- → y'=b
- → f(t)'=b
- → $\frac{df}{dt} = b$ ou $\frac{df(t)}{dt} = b$

✐ *Question:* **Déterminer les solutions de cette équation différentielle.**

$y = b \times t + C$ (avec C qui est une constante)

Cela revient à rechercher une primitive de y.

DEUXIEME PARTIE: RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE **y' = ay** (b=0 et a est un réel)

1) Solution

L´équation peut s´écrire sous différentes formes équivalentes:

- → y'=ay
- → f(t)'=af(t)
- → $\frac{df}{dt} = a.f$ ou $\frac{df(t)}{dt} = a.f(t)$

On obtient des solutions de la forme: $f(t) = C \times e^{at}$ ou $y = C \times e^{at}$ avec C qui est une constante.

✎ *Question:* **Vérifier rapidement que cette fonction est bien solution de l´équation différentielle** $y' = ay$**.**

$$y' = a \times C \times e^{at}$$

$$a \times y = a \times C \times e^{at}$$

La fonction est bien une solution.

2) Exemple en chimie

On fait réagir une espèce A de concentration initiale **$[A]_0$=2 mol/L** avec B de concentration initiale $[B]_0$=3 mol/L . La réaction qui s´écrit $A + B \rightarrow C + D$ est une réaction lente et **totale**. L´expérience montre que cette réaction est **d´ordre 1**.

✎ *Question:* **Ecrire l´équation différentielle qui décrit l´évolution de la concentration de A, puis donnez la solution.**

Vitesse de réaction: $v = -\dfrac{d[A]}{dt}$

Si la réaction est **d´ordre 1**, la vitesse est proportionnelle à [A] (voir cours)

On peut donc écrire: $v = -\dfrac{d[A]}{dt} = k \times [A]$ (k: coefficient de proportionnalité)

$$\frac{d[A]}{dt} = -k \times [A]$$

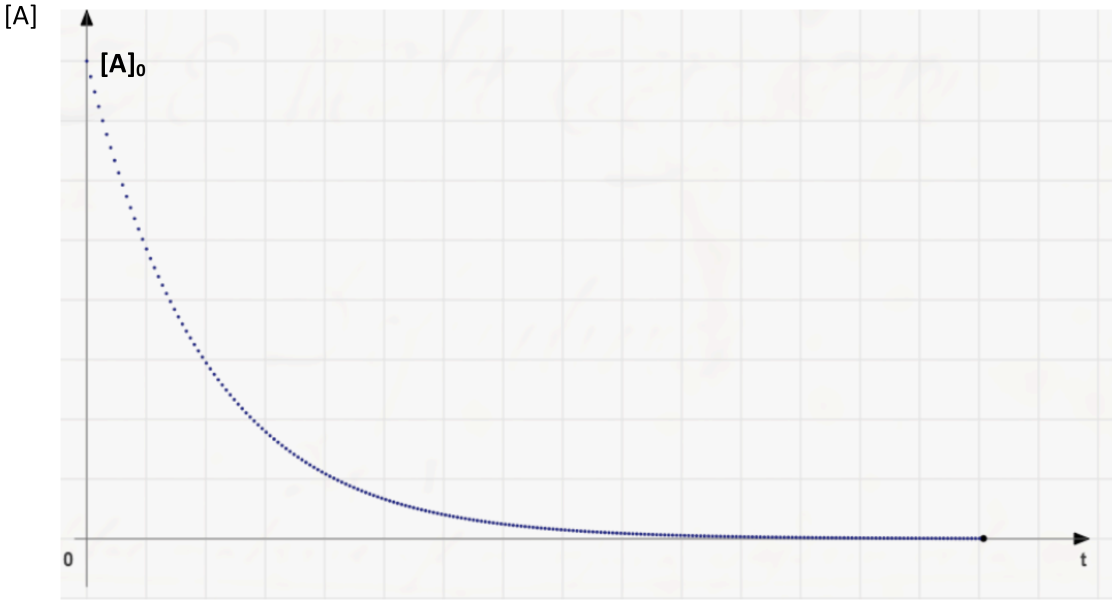
On a bien une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a=-k$

Solution: $[A]_t = C \times e^{-k \times t}$ (C est une constante)

A l´instant initial (t=0): $[A]_0 = C \times e^{-k \times 0} = C$

Solution: $[A]_t = [A]_0 \times e^{-k \times t}$

3) Représentation graphique



TROISIEME PARTIE: RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE y' = ay+b (a et b sont des réels)

1) Solution

On obtient des solutions de la forme: $y(t) = A \times e^{at} - \frac{b}{a}$

2) Notation physique

On préfère écrire en physique l'équation de premier ordre sous la forme :

y' - ay= b

$\boxed{y' + \frac{1}{\tau} \times y = b}$ avec $\tau = -\frac{1}{a}$ (c´est le **temps** caractéristique)

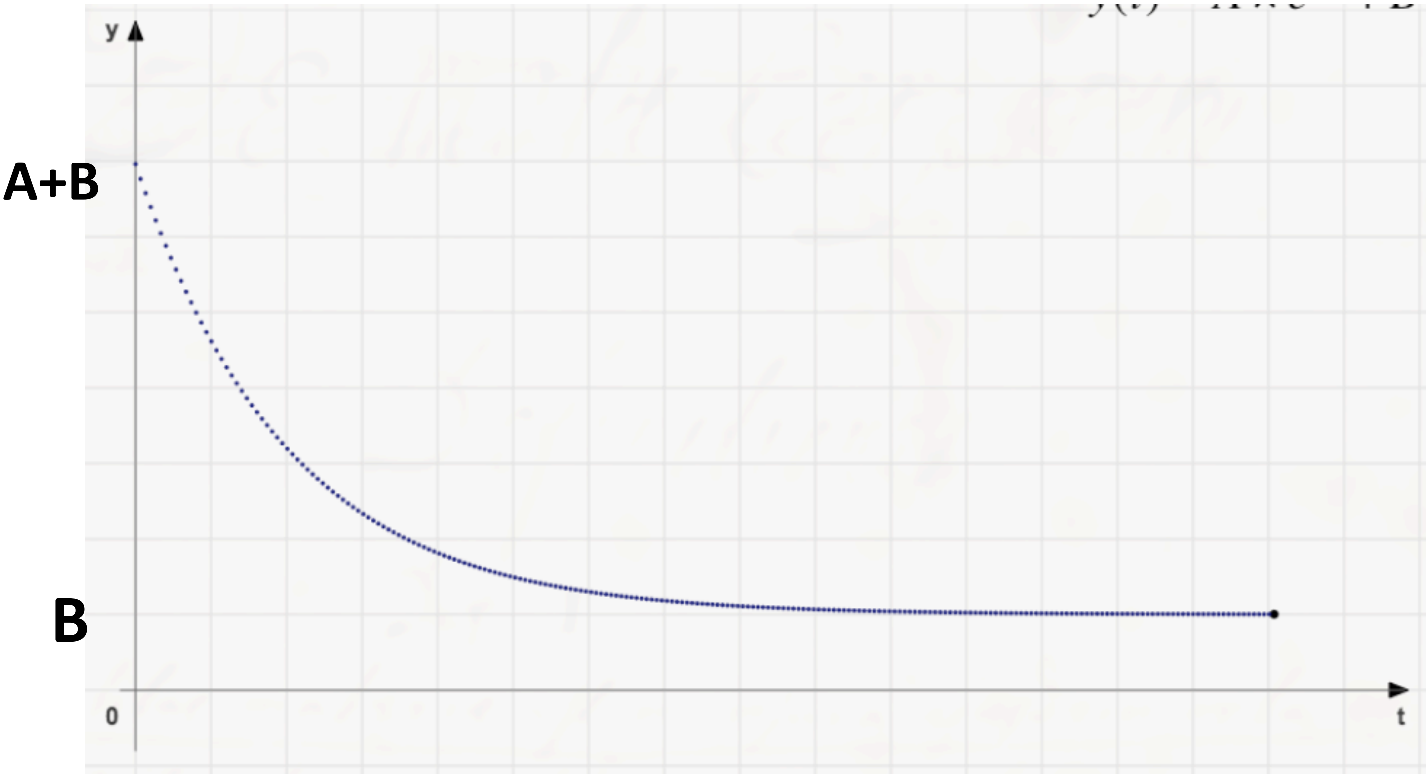
Solution de l´équation homogène (pour b=0)

Solution particulière (constante): B=b×τ

La solution s´écrira: $y(t) = A \times e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

On déterminera A avec les conditions initiales.

$$y(t) = A \times e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$



✎ *Code PYTHON:* **Dans PYTHON, faites la représentation graphique de la fonction. Observez l´influence des paramètres A, B et τ.**

3) Exemple en physique

Un parachutiste de masse m=80kg saute d´un avion. Il est soumis à son poids $\vec{P} = m \times \vec{g}$ mais aussi à la force de frottement de l´air proportionnelle à la vitesse qui peut s´écrire: $\vec{f} = -k \times \vec{v}$

✎ *Question:* **Ecrire l´équation différentielle qui décrit l´évolution de la vitesse du parachutiste. Montrer qu´il existe une vitesse limite** ($g=9{,}8 m.s^{-2}$). Dans ces conditions, on estime: $k=12 kg.s^{-1}$

Bilan des forces: $\Sigma\vec{F}_{ext} = m \times \vec{g} - k \times \vec{v}$

Deuxième Loi de Newton: $m \times \vec{a} = m \times \vec{g} - k \times \vec{v}$

En projetant sur l'axe du mouvement et en remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse, on obtient : $m \times \frac{dv}{dt} = m \times g - k \times v$

On a une équation différentielle (la fonction est v et la variable est t) du type: $y' + \frac{1}{\tau} \times y = b$

Solution particulière (constante): B=b×τ

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \times v$ $\quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \times v = g$ avec $\tau = \frac{m}{k}$

$$v_{(t)} = A \times e^{-\frac{t}{\tau}} + B \quad v_{(t)} = A \times e^{-\frac{t}{\tau}} + g \times \frac{m}{k}$$

A l´instant initial: $0 = A + g \times \frac{m}{k}$ donc: $A = -g \times \frac{m}{k}$

On remplace: $v_{(t)} = -g \times \frac{m}{k} \times e^{-\frac{t}{\tau}} + g \times \frac{m}{k}$

On factorise: $v_{(t)} = g \times \frac{m}{k} \times (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $v_{\lim} = B = g \times \frac{m}{k}$

$$v_{\lim} = 9{,}8 \times \frac{80}{12} = 65 m/s = 234 km/h$$