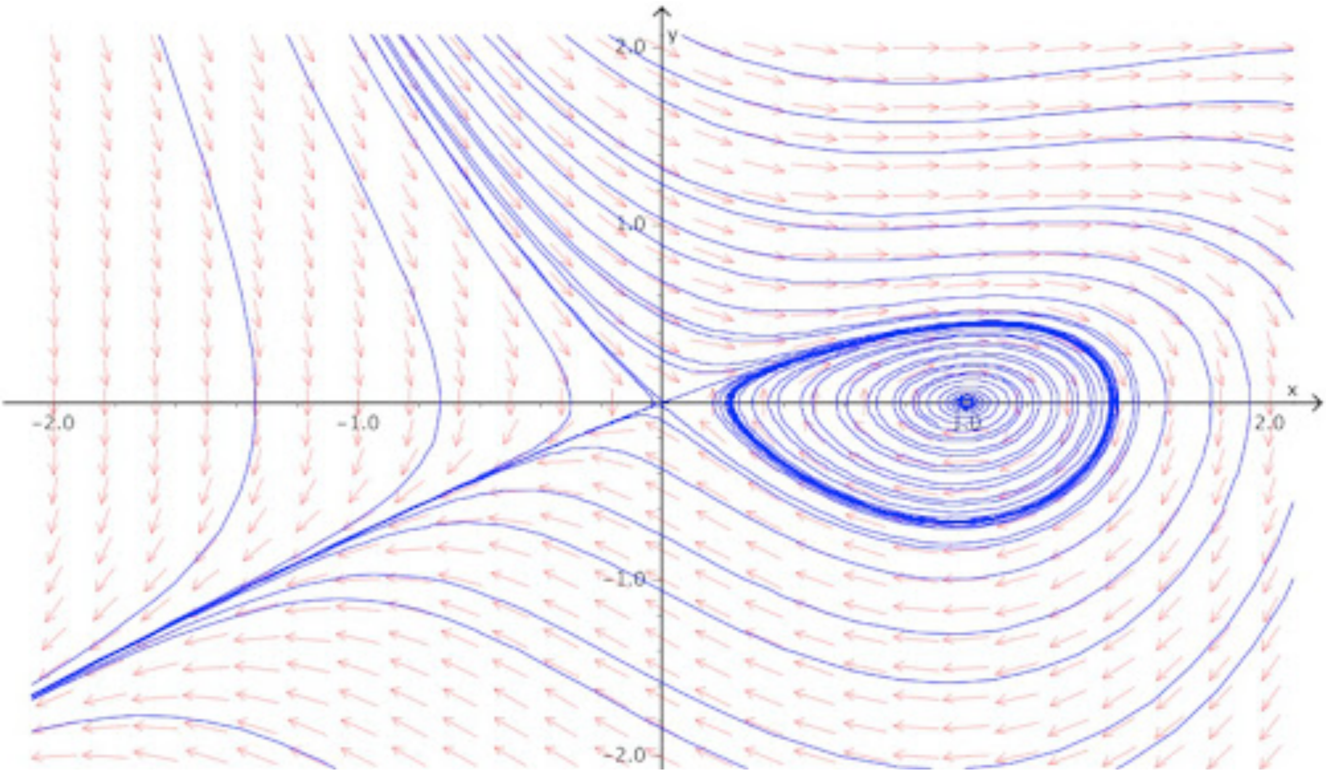


EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Comment résoudre une équation dont l´inconnue est une fonction?

L´équation **y' = ay + b** est une équation différentielle du **premier ordre** dont les coefficient a et b sont constants. Elle admet une solution qui est une fonction y=f(t) que l´on doit déterminer.

Nous allons voir ici la technique de résolution et l'intérêt qu´elle présente en physique et en chimie.

Attention, comme nous sommes en physique, la variable de la fonction f ne sera pas appelée x comme en Mathématiques mais t comme le temps.

PREMIERE PARTIE: RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE **y' = b** (a=0 et b est un réel)

Notons que cette équation peut s´écrire sous différentes formes équivalentes:

→ y'=b

→ f(t)'=b

→ $\frac{df}{dt} = b$ ou $\frac{df(t)}{dt} = b$

Question: **Déterminer les solutions de cette équation différentielle.**

....

....

....

....

DEUXIEME PARTIE: RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE **y' = ay** (b=0 et a est un réel)

1) Solution

L´équation peut s´écrire sous différentes formes équivalentes:

→ y'=ay

→ f(t)'=af(t)

→ $\frac{df}{dt} = a.f$ ou $\frac{df(t)}{dt} = a.f(t)$

On obtient des solutions de la forme: $f(t) = C \times e^{at}$ ou $y = C \times e^{at}$ avec C qui est une constante.

✎ *Question:* **Vérifier rapidement que cette fonction est bien solution de l´équation différentielle $y' = ay$.**

....

....

....

....

2) Exemple en chimie

On fait réagir une espèce A de concentration initiale $[A]_0$=2 mol/L avec B de concentration initiale $[B]_0$=3 mol/L . La réaction qui s´écrit $A + B \rightarrow C + D$ est une réaction lente et totale. L´expérience montre que cette réaction est d´ordre 1.

✎ *Question:* **Ecrire l´équation différentielle qui décrit l´évolution de la concentration de A, puis donnez la solution.**

....

....

....

....

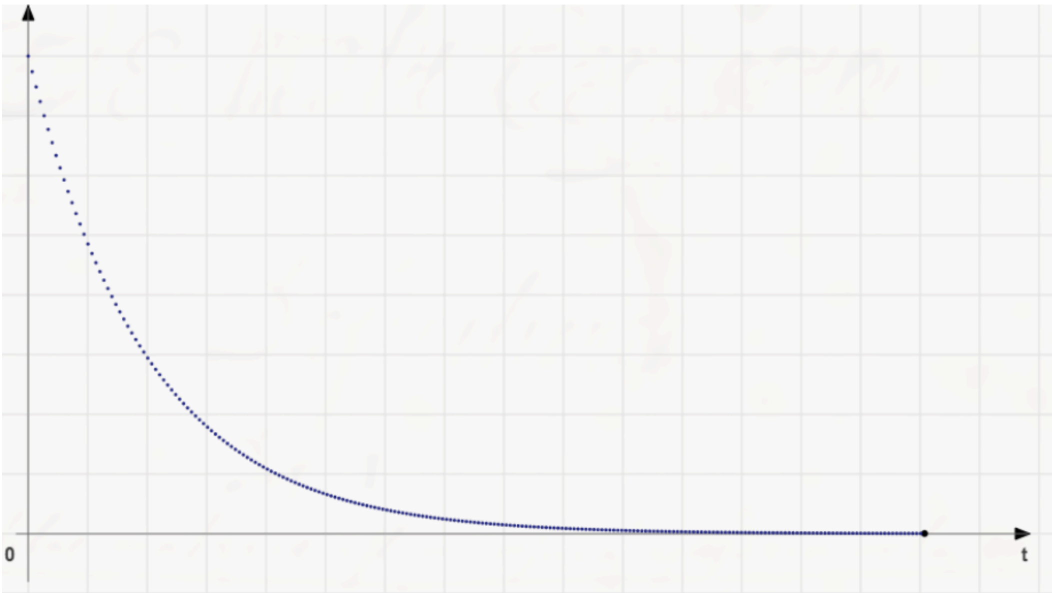
....

....

....

....

3) Représentation graphique



TROISIEME PARTIE: RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE y' = ay+b (a et b sont des réels)

1) Solution

On obtient des solutions de la forme: $y(t) = A \times e^{at} - \dfrac{b}{a}$

2) Notation physique

On préfère écrire en physique l'équation de premier ordre sous la forme :

$y' + \dfrac{y}{\tau} = b$ avec $\tau = -\dfrac{1}{a}$ (c´est le temps caractéristique)

Solution de l´équation homogène (pour b=0)

Solution particulière (constante): B=b×τ

La solution s´écrira: $y(t) = A \times e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

On déterminera A avec les conditions initiales.

$$y(t) = A \times e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

✎ *Code PYTHON:* **Dans PYTHON, faites la représentation graphique de la fonction. Observez l´influence des paramètres A, B et τ.**

....

....

3) Exemple en physique

Un parachutiste de masse m=80kg saute d´un avion. Il est soumis à son poids $\vec{P} = m \times \vec{g}$ mais aussi à la force de frottement de l´air proportionnelle à la vitesse qui peut s´écrire: $\vec{f} = -k \times \vec{v}$

✎ *Question:* **Ecrire l´équation différentielle qui décrit l´évolution de la vitesse du parachutiste. Montrer qu´il existe une vitesse limite** ($g=9{,}8 m.s^{-2}$). Dans ces conditions, on estime: $k=12 kg.s^{-1}$

Bilan des forces: $\Sigma\vec{F}_{ext} = m \times \vec{g} - k \times \vec{v}$

Deuxième Loi de Newton: $m \times \vec{a} = m \times \vec{g} - k \times \vec{v}$

En projetant sur l'axe du mouvement et en remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse, on obtient : $m \times \frac{dv}{dt} = m \times g - k \times v$

.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....