



Notions abordées en classe de première et de seconde:

Trajectoire de la Terre dans un référentiel fixe par rapport aux étoiles, conception géocentrique et conception héliocentrique, référentiel géocentrique, trajectoire de la Lune. Expression de la force gravitationnelle.

# PREMIÈRE PARTIE: LES TROIS LOIS DE KEPLER

## PREMIERE LOI (1609):

*Les planètes orbitent autour du Soleil en suivant une trajectoire en forme d'ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.*

F et F' : les deux foyers de l'ellipse. Le Soleil est en F.

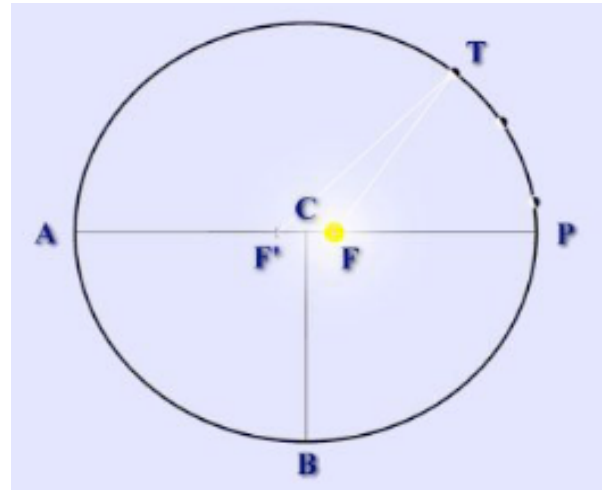
C : Centre géométrique de l'ellipse

P : Périhélie A : Aphélie

T : Terre comme exemple

Deux grandeurs définissent la forme de l'ellipse : son demi grand axe : AC ou CP = a et son excentricité :

$$e = CF / a$$

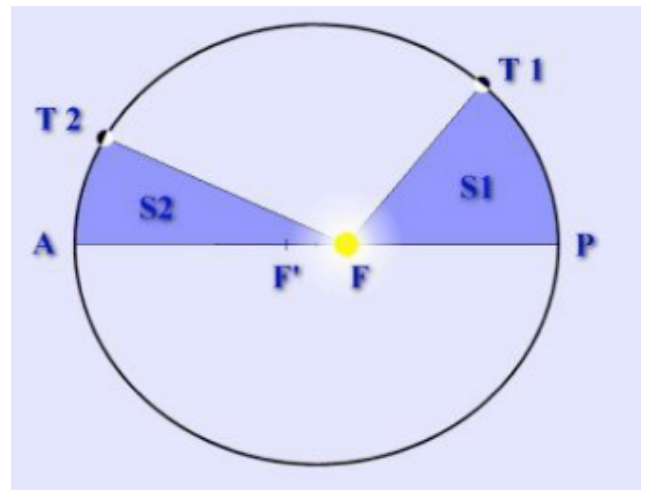


## DEUXIEME LOI (loi des aires):

*Les planètes balayent des aires égales en des temps égaux.*

Cette loi traduit la variation de la vitesse sur l'ellipse. La planète se déplace plus rapidement

Remarque: si la trajectoire est un cercle, la vitesse de la planète est constante.



## TROISIEME LOI (1618):

*Pour toutes les planètes, le rapport du carré des périodes de révolution au cube du demi grand axe de l'orbite est constant.*

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

Ce nombre est le même pour toutes les planètes du système solaire

### Remarques :

- Le demi grand axe (AC sur le premier schéma) devient le rayon de l'orbite si celle-ci est un cercle.
- Il n'est pas obligatoire de convertir T en secondes et a en mètres. Il suffit que les unités soient cohérentes entre elles.

*✍ APPLICATION: À l'aide de la troisième loi de Kepler et des données, déterminez la période de révolution de Jupiter et de Saturne.*

Données :

Terre :  $T_T = 1,00 \text{ an}$ ,  $r_T = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$  (rayon de l'orbite).

Saturne :  $r_S = 1,43 \times 10^9 \text{ km}$  Jupiter :  $r_J = 7,78 \times 10^8 \text{ km}$

.....

.....

.....

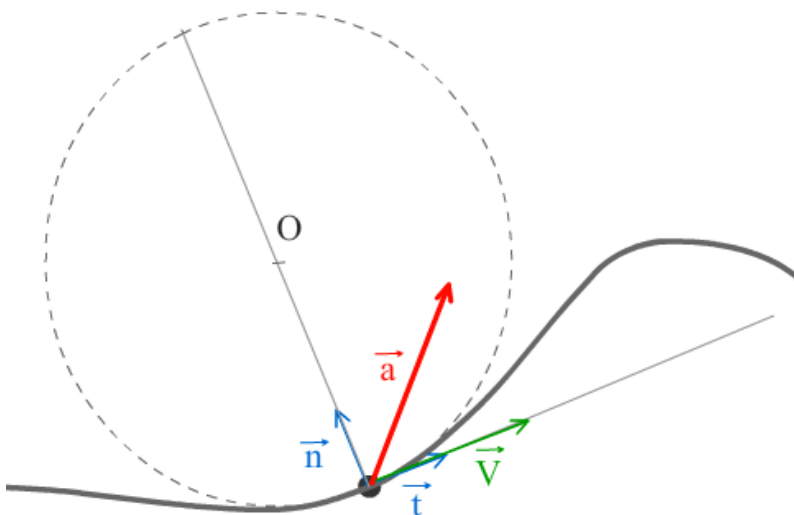
.....

.....

.....

## DEUXIÈME PARTIE: LES LOIS DE NEWTON APPLIQUEES AUX ORBITES CIRCULAIRES

- 1) **La base de Frénet:** Comment décrire le mouvement d'un objet sur une trajectoire curviligne?



L'objet représenté sur le schéma ci-dessous suit une trajectoire curviligne. On définit la base de FRENET par son centre (la position de l'objet), le vecteur unitaire  $\vec{t}$  tangent à la trajectoire et le vecteur  $\vec{n}$  perpendiculaire et dirigé vers le point O, le centre du rayon de courbure (cercle pointillé de rayon r).

Remarque: Les vecteurs  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  sont parfois appelés  $\vec{u}_t$  et  $\vec{u}_n$

On remarque immédiatement que le vecteur vitesse  $\vec{V}$  est tangent à la trajectoire et donc colinéaire à  $\vec{t}$

Le vecteur accélération n'étant pas encore connu, il est dessiné ici "au hasard".

### Expression du vecteur vitesse dans la base de FRENET:

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_t = V \\ V_n = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \vec{V} \text{ est colinéaire à } \vec{t} \\ \vec{V} \text{ est perpendiculaire à } \vec{n} \end{array}$$

### Expression du vecteur accélération dans la base de FRENET:

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_t = \frac{dV}{dt} \\ a_n = \frac{V^2}{r} \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ r \text{ est le rayon du cercle pointillé} \end{array}$$

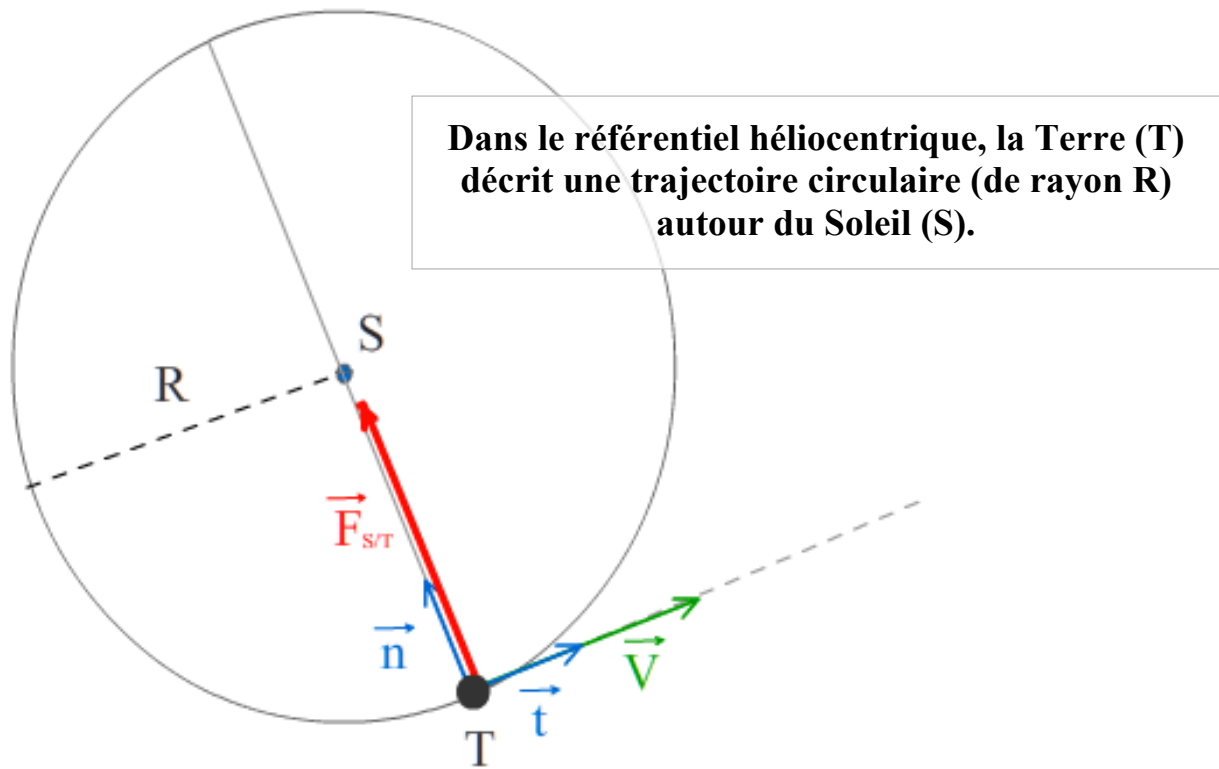
Nous ne démontrerons pas ces deux expressions établies par le mathématicien Jean Frédéric FRENET. On se contente de les retenir.

La base de FRENET va grandement faciliter l'étude du mouvement des planètes dans le cadre de la deuxième loi de NEWTON que nous allons réaliser maintenant...

**2) Référentiel et bilan des forces:** Comment décrire le mouvement d'un objet sur une trajectoire curviligne?

Dans cette étude, nous prendrons l'exemple du mouvement de la Terre autour du Soleil que nous considérerons **toujours comme circulaire**.

**Le référentiel d'étude est héliocentrique.**



**Bilan des forces:** La Terre de masse  $M_T$  n'est soumise qu'à la force gravitationnelle  $\vec{F}_{S/T}$  que le Soleil de masse  $M_S$  exerce sur elle. Cette force attractive est représentée sur le schéma. Remarquons tout de suite qu'elle est colinéaire à  $\vec{n}$ .

Cette force étudiée en classe de seconde s'écrit vectoriellement:

$$\vec{F}_{S/T} = G \times \frac{M_S \times M_T}{R^2} \times \vec{n}$$

**G est la constante de gravitation universelle:**  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

### 3) Expression de l'accélération:

Dans le référentiel héliocentrique, on peut appliquer la **deuxième loi de Newton** à la Terre pour trouver l'expression du vecteur accélération:

.....

.....

.....

.....

.....

#### **Première conséquence:**

On remarque tout de suite que le vecteur accélération de la Terre est colinéaire à  $\vec{n}$  (vous

pouvez le représenter sur le schéma). Il est donc toujours dirigé vers le Soleil, on dit qu'il est **centripète**.

Or, dans la base de FRENET, le vecteur accélération s'écrit:  $\vec{a} \begin{cases} a_t = \frac{dV}{dt} \\ a_n = \frac{V^2}{R} \end{cases}$

Comme l'accélération est centripète :  $a_t=0$  donc :  $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$

**Conséquence: La norme du vecteur vitesse de la Terre (V) est constante donc le mouvement est uniforme.**

L'accélération de la Terre s'écrit donc:  $a = a_n = \frac{V^2}{R}$

*✎ Représentez sans souci d'échelle le vecteur accélération sur le schéma de la page précédente.*

#### 4) **Expression de la vitesse de la Terre sur son orbite:**

Nous venons de voir que l'accélération étant centripète, elle se réduit à sa composante normale :  $a = a_n = \frac{V^2}{R}$

Or, la norme du vecteur accélération s'écrit:  $a = G \times \frac{M_s}{R^2}$  (n est un vecteur de norme 1, on peut "enlever les flèches").

On en déduit l' expression de la vitesse de la Terre:

.....  
.....  
.....  
.....

*✎ APPLICATION: Montrez que la vitesse de la Terre sur son orbite est d'environ 30km/s*

$M_s = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ,  $R = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$  (rayon de l'orbite à convertir en mètre!).

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$

.....  
.....  
.....  
.....

### 5) Expression de la période de révolution de la Terre:

La vitesse de la Terre sur son orbite étant constante, elle est égale à la distance à parcourir pour faire un tour (le périmètre du cercle:  $2\pi \times R$ ) divisée par le temps pour faire un tour ( $T$ , la période que nous cherchons), on peut donc écrire:

$$v = \frac{2\pi \times R}{T} \text{ donc la période s'écrit: } T = \frac{2\pi \times R}{v}$$


Si on remplace dans cette formule l'expression de  $v$  trouvée plus haut on trouve l'expression de la période:

.....

.....

.....

.....

 **APPLICATION:** Montrez que la période de révolution de la Terre est d'un an.

$M_s = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ,  $R = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$  (Rayon de l'orbite à convertir en mètre!).

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$

.....

.....

.....

.....

.....

#### **Dernière remarque d'importance!**

En élevant l'expression de la période au carré on a:  $T^2 = \frac{4\pi^2 \times R^3}{G \times M_s}$

Qui peut s'écrire:  $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s}$

Que remarque-t-on? Le **rapport du carré de la période de révolution au cube du rayon de l'orbite est constant.**

**La deuxième loi de Newton nous permet de démontrer la troisième loi de Kepler (dans le cas des orbites circulaires)!**