Exercices : Satellites CORRECTION

I) PERIODES DE REVOLUTION

Données :
Terre : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,kg$, $T_T = 1{,}00\,an$, $r_T = 1{,}50 \times 10^8\,km$ (rayon de l´orbite).
Saturne : $r_S = 1{,}43 \times 10^9\,km$ Jupiter : $r_J = 7{,}78 \times 10^8\,km$
G= $6{,}67 \times 10^{-11}$ SI

1) D´après la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{r^3} = constante$

On a donc :

$$\frac{T_T^{\,2}}{r_T^{\,3}} = \frac{T_J^{\,2}}{r_J^{\,3}} \quad T_J = \sqrt{\frac{T_T^{\,2}}{r_T^{\,3}} \times r_J^{\,3}} = 11{,}8\,ans$$

Pour Saturne, on trouve : 29,4 ans. On remarque qu´il est inutile de convertir les unités en SI si elles sont cohérentes entre elles.

2)
La difficulté dans ce calcul est de convertir les distances en m et le temps en s (SI). Pour T et r, on choisit les valeurs de n´importe quelle planète. Ici, on a choisi la Terre :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}, \text{ donc : } M_S = \frac{4\pi^2 \times R^3}{G \times T^2} = \frac{4\pi^2 \times (1{,}50 \times 10^{11})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (60 \times 60 \times 24 \times 365{,}25)^2} = 2{,}00 \times 10^{30}\,kg$$

II. UN TROU NOIR AU CENTRE DE LA GALAXIE

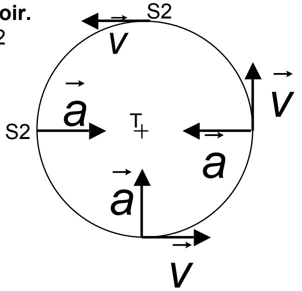
1. Mise en évidence de l'existence du trou noir.

L'énoncé de la première loi de Kepler, appelée aussi loi des orbites, est « Dans un référentiel **héliocentrique**, la trajectoire du centre d'une planète est une **ellipse** dont le centre du Soleil est l'un des foyers. »
On peut l'adapter à la situation présentée ici : « *Dans le référentiel du trou noir, la trajectoire du centre de l'étoile S_2 est une* ***ellipse*** *dont le centre du trou noir est l'un des foyers.* »
Ainsi la forme elliptique de la trajectoire de l'étoile S_2 a permis de justifier l'existence d'un trou noir au centre de la Galaxie.

2. Estimation de la masse du trou noir.
2.1. Trajectoire simplifiée de l'étoile S2

T = Trou noir

Rayon de la trajectoire $S_2T = r$



2.2. On se situe ici dans l´approximation circulaire :

On applique la deuxième loi de Newton au système {étoile S2} de masse *m* dans le référentiel du trou noir supposé galiléen.
On considère que l'étoile S_2 est soumise uniquement à la force d'attraction gravitationnelle du trou noir notée $\vec{F}_{T/S2}$.

$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{T/S2} = G \times \frac{m \times M}{r^2} \times \vec{n}$ (ce vecteur unitaire est dirigé vers T)

Or, d´après le seconde loi de Newton : $\Sigma\vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}$

Donc : $m \times \vec{a} = G \times \frac{m \times M}{r^2} \times \vec{n}$ et : $\vec{a} = G \times \frac{M}{r^2} \times \vec{n}$

L´accélération est donc centripète. On en déduit que dans la base de Frénet : $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, le mouvement est uniforme et que : $a_n = \frac{v^2}{r}$

$$\frac{v^2}{r} = G \times \frac{M}{r^2}$$

On retrouve l'expression proposée : $v = \sqrt{G.\frac{M}{r}}$.

2.3. L'étoile S2 parcourt son orbite de longueur L = 2π.r en une durée de révolution :

$v = \frac{2\pi.r}{T}$ donc $T = \frac{2\pi.r}{v}$

$T = \frac{2\Pi \times r}{\sqrt{\frac{G \times M}{r}}}$ donc : $T = 2\Pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \times M}}$

2.4. $T^2 = \frac{4\pi^2.r^3}{G.M}$ donc $M = \frac{4\pi^2.r^3}{G.T^2}$

Il faut convertir les heures-lumière en mètres et la période en secondes.

$$M = \frac{4\pi^2 \times \left(132 \times 3600 \times 3{,}00 \times 10^8\right)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times \left(15{,}2 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600\right)^2} = 7{,}45 \times 10^{36} \text{ kg}$$

Le document 1 annonce que le trou noir a une masse de 3 à 4 millions de masse solaire.

Calculons le rapport $\frac{M}{M_S} = \frac{7{,}4530112555 \times 10^{36}}{2{,}0 \times 10^{30}} = 3{,}7 \times 10^6$

La valeur de la masse *M* du trou noir est cohérente puisqu'elle vaut 3,7 millions de fois la masse solaire.

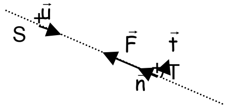
III. SATURNE ET TITAN

1- Quelques caractéristiques de Titan :

1.1 *Forces*

1.1.1 Titan subit la force **d'interaction gravitationnelle** exercée par Saturne.

1.1.2 1.1.3 $\vec{F}_{S/T} = G \times \dfrac{M_T \times M_S}{r^2} \times \vec{n}$



1.2 *Accélération et vitesse.*

1.2.1 D'après la **seconde loi de Newton**, appliquée à Titan, réduit à son centre d'inertie T, dans le référentiel saturno-centrique : $\Sigma \vec{F}_{ext} = M_T \times \vec{a}$

Donc : $M_T \times \vec{a} = G \times \dfrac{M_T \times M_S}{{R_T}^2} \times \vec{n}$ et : $\vec{a} = G \times \dfrac{M_S}{{R_T}^2} \times \vec{n}$ (l´accélération est centripète).

1.2.2 Dans la base de Frénet, on peut écrire :

$a_t = \dfrac{dv}{dt}$ et $a_n = \dfrac{v^2}{R_T}$

1.2.3 La force $\vec{F}$ est **centripète** dirigée vers Saturne, le vecteur accélération est donc lui aussi **centripète** puisque les deux vecteurs sont colinéaires. Il se réduit donc à la composante normale.

1.3 Type de mouvement

1.3.1 Le vecteur accélération de Titan étant normal on a donc $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$, la valeur de la vitesse v de Titan est donc constante. Le mouvement de Titan autour de Saturne est uniforme.

1.3.2 $a = G \times \dfrac{M_S}{{R_T}^2}$ et $a_n = \dfrac{v^2}{R_T}$ donc : $\dfrac{v^2}{R_T} = G \times \dfrac{M_S}{{R_T}^2}$ et : $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G.M_S}{R_T}}}$

2- D'autres satellites de Saturne :

2.1.1 *Loi de Kepler*

$v = \dfrac{2\pi.r}{T}$ donc: $T = \dfrac{2\pi.r}{v}$

$T = \dfrac{2\Pi \times R}{\sqrt{\dfrac{G \times M}{R}}}$ on élève cette expression au carré: $T^2 = 4\Pi^2 \times \dfrac{R^3}{G \times M_S}$ et : $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\Pi^2}{G \times M_S}$

Remarque : la question n´est pas très bien formulée. On peut seulement dire que le rapport $\dfrac{T^2}{R^3}$ est constant, et qu'on retrouve ainsi la loi de Képler <u>dans l´approximation circulaire</u>.

2.1.2 Ce rapport étant constant pour tous les satellites de Saturne, on peut écrire : $\dfrac{{T_E}^2}{{R_E}^3} = \dfrac{4\Pi^2}{G \times M_S}$ donc :

${R_E}^3 = \dfrac{G \times M_S}{4\Pi^2} \times {T_E}^2$ donc : $R_E = \sqrt[3]{\dfrac{G \times M_S}{4\Pi^2} \times {T_E}^2}$

Soit : $\mathbf{R_E} = \sqrt[3]{\dfrac{6,67\times10^{-11}\times5,69\times10^{26}}{4\pi^2}\times(1,37\times3600\times24)^2} = \mathbf{2,38 \times 10^8\ m}$

3- Satellite saturno-stationnaire

3.1 Un satellite saturno-stationnaire reste à la verticale du même point. Sa période de révolution est donc égale à la durée d'un jour sur Saturne. $T_C = T_S$.

3.2 *Altitude de la sonde*

3.2.1. On a vu à la question 2.1.2 que pour tous les satellites de Saturne: $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\Pi^2}{G \times M_S}$ et que donc :

$R = \sqrt[3]{\dfrac{G \times M_S}{4\Pi^2} \times T^2}$. Appliquons cette formule à la sonde Cassini : $R_C = \sqrt[3]{\dfrac{G \times M_S}{4\Pi^2} \times {T_C}^2}$ où R_C est le rayon de l'orbite de la sonde Cassini.

Or $R_C = R_S + h$ et $T_C = T_S$ donc : $\boxed{h = \sqrt[3]{\dfrac{G.M_S}{4\pi^2}.{T_S}^2} - R_S}$ (puisque $T_C = T_S$).

3.2.2. $\mathbf{h} = \sqrt[3]{\dfrac{6,67\times10^{-11}\times5,69\times10^{26}}{4\pi^2}\times(10\times3600+39\times60)^2} - 6,0\times10^7 = \mathbf{5,2 \times 10^7\ m}$

Pensez à convertir T_S en secondes, R_S en m.