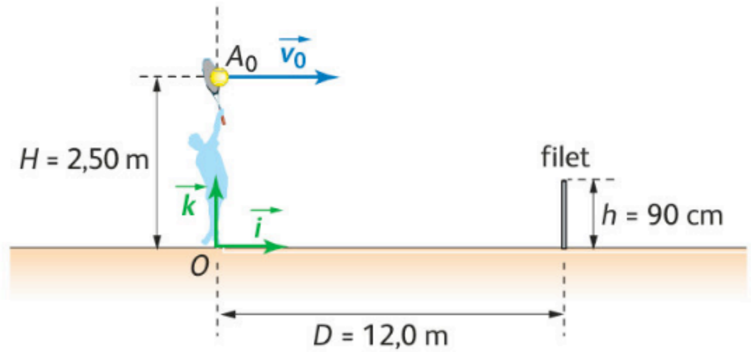
Au service, un joueur de tennis lance la balle verticalement et la frappe avec sa raquette quand elle est à une hauteur $H = 2{,}50$ m du sol. Le joueur lui communique alors une vitesse horizontale de valeur $v_0 = 20{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. La balle passera-t-elle au dessus du filet ?



a. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de la balle et en déduire les coordonnées $a_x(t)$ et $a_z(t)$ de la balle modélisée par un point matériel A.

b. Établir que les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ de la balle sont les suivantes :

$$x(t) = v_0 t$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + H$$

En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.

c. La balle passera-t-elle au dessus du filet situé à $D = 12{,}0$ m de la position de lancement ? La hauteur du filet à cet endroit est $h = 90$ cm.

d. En utilisant le théorème de l´énergie cinétique, calculer la vitesse de la balle lorsqu´elle passe au niveau du filet.

a. Le référentiel est terrestre et considéré comme galiléen.

- Bilan des forces : On néglige toutes les actions dues à l'air, donc la balle est en chute libre, soumis uniquement à son poids $\vec{P} = m \times \vec{g}$.
- On peut appliquer la deuxième loi de Newton à l´objet pour déterminer les coordonnées du vecteur accélération : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}$
- Ainsi : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a} = m \times \vec{g}$ donc : $\vec{a} = \vec{g}$

On projette cette expression sur les axes : $\vec{a} \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix}$

b. Comme $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse:

$$\vec{V} \begin{vmatrix} V_x = V_{0x} = V_0 \times \cos(0) = V_0 \\ V_z = g \times t + V_{0z} = -g \times t + V_0 \times \sin(0) = -g \times t \end{vmatrix}$$

En intégrant, on obtient enfin les coordonnées du vecteur position: $\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x = V_0 \times t \\ z = -\dfrac{1}{2} g \times t^2 + H \end{vmatrix}$

Trajectoire:

On remplace l´expression $t = \dfrac{x}{Vo}$ dans l´équation horaire de y pour obtenir :

$$z(x) = -\frac{g \times x^2}{2 \times V_0^2} + H$$

c. On calcule z pour x=D:

$$z(x) = -\frac{9{,}8 \times 12^2}{2 \times 20^2} + 2{,}5 = 0{,}74 m$$

La balle ne passe pas le filet.

d. Théorème de l´énergie cinétique entre le point initial (O) et le filet (F):

$$\Delta E_c(O \rightarrow F) = \frac{1}{2} \times m \times v_F^{\ 2} - \frac{1}{2} \times m \times v_O^{\ 2} = \Sigma W_{OF}(\vec{F})$$

Seul le poids travaille donc:

$$\Sigma W_{OF}(\vec{F}) = \Sigma W_{OF}(\vec{P}) = m \times g \times (z_O - z_F)$$

$$\frac{1}{2} \times m \times {v_F}^2 - \frac{1}{2} \times m \times {v_O}^2 = m \times g \times (z_O - z_F)$$

$$\frac{1}{2} \times m \times {v_F}^2 = m \times g \times (z_O - z_F) + \frac{1}{2} \times m \times {v_O}^2$$

$$v_F = \sqrt{2 \times g \times (z_O - z_F) + {v_O}^2}$$

$$v_F = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times (2{,}5 - 0{,}74) + 20^2} = 20{,}8 m/s$$