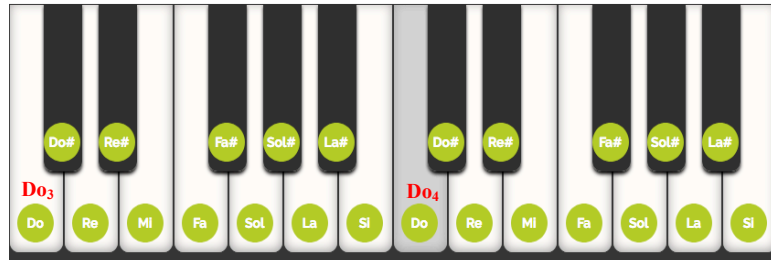


# MUSIQUE ET MATHÉMATIQUES

## LES INTERVALLES MUSICAUX

### I) LES INTERVALLES MUSICAUX



Une octave

Le Sol est la quinte du Do.

1) Qu'est ce qu'une octave?

Une octave, est l'intervalle qui sépare par exemple le Do<sub>3</sub> et le Do<sub>4</sub>. Nous avons vu que la fréquence du Do<sub>4</sub> est le double de celle du Do<sub>3</sub>.

2) Qu'est ce qu'un demi-ton?

Un demi-ton est l'intervalle qui sépare une note de la suivante. Il y a par exemple un demi-ton entre le Mi et le Fa ou entre le Ré et le Ré#. Remarquons qu'une octave correspond à 12 demi-tons. Sur le piano: Do, Do#, Ré, Ré#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si

3) Qu'est ce qu'une quinte?

Une quinte est l'intervalle qui correspond à 7 demi-tons. Le Sol est la quinte du Do et le Ré est la quinte du Sol. Depuis l'antiquité, cet intervalle est étudié car deux notes séparées par un intervalle de quinte sonnent ensembles de manière harmonieuse. Essayez sur le piano.

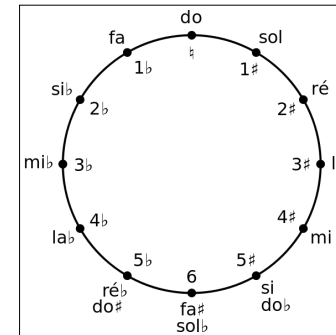
4) Les rapports de fréquences entre les notes selon Pythagore:

Nom	Rapport de fréquence	Nombre de demi-tons
Do <sub>3</sub>	1/1	0
Ré	9/8	2
Mi	5/4	4
Fa (quarte)	4/3	5
<b>Sol (quinte)</b>	<b>3/2</b>	<b>7</b>
La	8/5	9
Do <sub>4</sub>	2/1	12

Dans l'antiquité, Pythagore a tenté de déterminer le rapport de fréquence entre les notes en les exprimant en fractions de nombre entiers (tableau ci-contre). Par exemple, l'intervalle de quinte entre le Do<sub>3</sub> et le Sol<sub>3</sub> peut s'écrire:

$$\frac{f_{Sol_3}}{f_{Do_3}} = \frac{3}{2}$$

### II) LE CYCLE DES QUINTES



On commence par la note Do et on ajoute une quinte, on obtient Sol. On ajoute ensuite la quinte du Sol, on obtient Ré et ainsi de suite... On retrouve la note Do après une suite de 12 quintes.

1) Quel est le rapport de fréquence entre un Do et le suivant après un parcours complet du cycle de quinte?

Comme nous l'avons vu, pour obtenir une quinte, on multiplie (selon Pythagore) la fréquence de la note par 3/2. Pour retrouver la note Do après un tour complet du cycle, on a effectué cette opération 12 fois:

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$$

Ce qui correspond à :  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$  qui vaut environ

129,746337890625

2) Sachant que ce parcours correspond à 7 octaves exactement, quel est le rapport entre ces deux fréquences?

Comme nous avons parcouru 7 octaves et qu'une octave correspond à une fréquence doublée, un tour complet du cycle des quintes correspond à une fréquence doublée 7 fois de suite, c'est à dire un rapport de fréquence de:  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$   
Or  $2^7 = 128$  (2 puissance 7).

On se rend compte qu'un parcours du cycle des quintes donne une fréquence légèrement différente qu'à la question précédente! En effet: 128 est légèrement différent de 129,746337890625....

D'où vient le problème? Le rapport de nombres entiers imaginé par Pythagore n'est pas parfaitement exact. Les mathématiciens du XVII<sup>e</sup> siècles se sont attaqués à ce problème.

### III) LA GAMME (BIEN) TEMPÉRÉE

Note	Gamme de Pythagore	Gamme tempérée
do	260,74	261,63 Do <sub>3</sub>
do#	278,44	277,18
ré	293,33	293,66
ré b	309,03	311,13
mi	330,00	329,63
fa	347,65	349,23
fa#	371,25	369,99
sol	391,11	392,00
sol#	417,66	415,30
la	440,00	440,00 La <sub>3</sub>
si b	463,54	466,16
si	495,00	493,88
do	521,48	523,25 Do <sub>4</sub>

Réfléchissons... Si il y a 12 demi-tons dans une octave, par exemple entre le Do<sub>3</sub> et le Do<sub>4</sub>, nous savons que l'on peut écrire:

$$\frac{f_{Do_4}}{f_{Do_3}} = 2$$

Si 12 demi-tons correspondent à une fréquence doublée, quel est l'intervalle correspondant à un seul demi-ton? On peut montrer que cela correspond à:

$$\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$$

Il s'agit de la racine douzième de 2... Regardons un exemple pour mieux comprendre:

A partir de la valeur de la fréquence de référence du La<sub>3</sub>, vérifiez la valeur de la fréquence du Do<sub>4</sub> dans la gamme tempérée:

Le document précédent nous montre que la fréquence du La<sub>3</sub> est de 440Hz. Combien de demi-tons séparent le La<sub>3</sub> du Do<sub>4</sub>? Il y en a exactement 3. Pour obtenir la fréquence du Do<sub>4</sub>, nous devons multiplier celle du La<sub>3</sub> par  $\sqrt[12]{2}$  3 fois de suite. C'est à dire:  $\sqrt[12]{2} \times \sqrt[12]{2} \times \sqrt[12]{2} = (\sqrt[12]{2})^3$

Le calcul à faire est donc:  $\frac{f_{Do4}}{f_{La3}} = (\sqrt[12]{2})^3$  donc:

$$f_{Do4} = (\sqrt[12]{2})^3 \times f_{La3} = (\sqrt[12]{2})^3 \times 440 = 523,2511306Hz$$

On retrouve bien la valeur donnée en dernière ligne du tableau précédent.