

## Exercice 1 – Vol en montgolfière (11 points)

## 1. L'envol de la montgolfière

**Q1. Montrer que la valeur de la masse molaire  $M_{\text{air}}$  de l'air est voisine de  $29 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ .**

L'air est composé de 80% de diazote et 20% de dioxygène,

$$\text{ainsi } M_{\text{air}} = \frac{80}{100} \times M(\text{N}_2) + \frac{20}{100} \times M(\text{O}_2) = \frac{80}{100} \times 2M(\text{N}) + \frac{20}{100} \times 2M(\text{O})$$

$$M_{\text{air}} = \frac{80}{100} \times 2 \times 14 \times 10^{-3} + \frac{20}{100} \times 2 \times 16 \times 10^{-3} = 2,88 \times 10^{-2} \text{ kg} = 28,8 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

La masse molaire de l'air est bien voisine de  $29 \times 10^{-3} \text{ kg}$ .

**Q2. En exploitant l'équation d'état des gaz parfaits, exprimer littéralement la masse  $m_{\text{int}}$  de l'air contenu à l'intérieur de l'enveloppe en fonction de la pression  $p_{\text{int}}$  de l'air à l'intérieur, du volume  $V$  de l'enveloppe, de la masse molaire  $M_{\text{air}}$  de l'air, de la constante  $R$  des gaz parfaits et de la température  $T_{\text{int}}$  de l'air situé à l'intérieur de l'enveloppe.**

D'après la loi des gaz parfaits  $p_{\text{int}} \cdot V = n_{\text{air}} \cdot R \cdot T_{\text{int}}$

$$p_{\text{int}} \cdot V = \frac{m_{\text{int}}}{M_{\text{air}}} \cdot R \cdot T_{\text{int}}$$

$$m_{\text{int}} = \frac{p_{\text{int}} \cdot V \cdot M_{\text{air}}}{R \cdot T_{\text{int}}}$$

**Q3. Exprimer le poids total du système {montgolfière + air intérieur}, noté  $P_{\text{total}}$ , en fonction des masses  $m_{\text{ens}}$  et  $m_{\text{int}}$ .**

$$P_{\text{total}} = (m_{\text{ens}} + m_{\text{int}}) \cdot g$$

**Q4. Calculer la valeur de la poussée d'Archimède  $\pi_A$  qui s'exerce sur le système {montgolfière + air intérieur}, au niveau du sol.**

$$\pi_A = \rho_{\text{ext}} \cdot V \cdot g$$

$$\pi_A = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \times 2,5 \times 10^3 \text{ m}^3 \times 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 2,943 \times 10^4 \text{ N} (= \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = 2,9 \times 10^4 \text{ N}$$

**Q5. Montrer que l'expression de la valeur de la température minimale  $T_{\text{min}}$  de l'air à l'intérieur de l'enveloppe pour que la montgolfière puisse décoller est :**

$$T_{\text{min}} = \frac{p_{\text{int}} \cdot V \cdot M_{\text{air}}}{R \cdot \left( \frac{\pi_A}{g} - m_{\text{ens}} \right)}$$

**Calculer la valeur de  $T_{\text{min}}$ . On admet que la pression  $p_{\text{int}}$  de l'air à l'intérieur de l'enveloppe est égale à la pression atmosphérique  $p_{\text{atm}} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ .**

Pour que la montgolfière puisse décoller il faut que  $\pi_A \geq P_{\text{total}}$ .

$$\pi_A \geq (m_{\text{ens}} + m_{\text{int}}) \cdot g$$

$$\pi_A \geq \left( m_{\text{ens}} + \frac{p_{\text{int}} \cdot V \cdot M_{\text{air}}}{R \cdot T_{\text{int}}} \right) \cdot g$$

$$\frac{\pi_A}{g} \geq \left( m_{\text{ens}} + \frac{p_{\text{int}} \cdot V \cdot M_{\text{air}}}{R \cdot T_{\text{int}}} \right)$$

$$\frac{\pi_A}{g} - m_{\text{ens}} \geq \frac{p_{\text{int}} \cdot V \cdot M_{\text{air}}}{R \cdot T_{\text{int}}}$$

$$R \cdot \left( \frac{\pi_A}{g} - m_{\text{ens}} \right) \geq \frac{p_{\text{int}} \cdot V \cdot M_{\text{air}}}{T_{\text{int}}}$$

$$T_{\text{int}} \geq \frac{p_{\text{int}} \cdot V \cdot M_{\text{air}}}{R \cdot \left( \frac{\pi_A}{g} - m_{\text{ens}} \right)}$$

$$\text{On retrouve bien } T_{\text{min}} = \frac{p_{\text{int}} \cdot V \cdot M_{\text{air}}}{R \cdot \left( \frac{\pi_A}{g} - m_{\text{ens}} \right)}$$

$$T_{\min} = \frac{1,0 \times 10^5 \times 2,5 \times 10^3 \times 29 \times 10^{-3}}{8,31 \times \left( \frac{2,943 \times 10^4}{9,81} - 500 \right)} = 349 \text{ K}$$

$$T_{\min} = 349 - 273 = 76^\circ\text{C}$$

$\frac{1E5*2.5*29}{8.31 * \left( \frac{2.943E4}{9.81} - 500 \right)}$
$3.48977136E2$

**Q6. Déterminer la valeur de l'accélération du système {montgolfière + air intérieur}. Calculer ensuite la valeur de sa vitesse au bout de 10 s puis au bout de 1 minute d'ascension.**

D'après la deuxième loi de Newton appliquée au système {montgolfière + air intérieur}.

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{tot}} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{\pi}_A = m_{\text{tot}} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{P} + \vec{\pi}_A}{m_{\text{tot}}}$$

Par projection suivant l'axe vertical Oz

$$a_z = \frac{P_z + \pi_{Az}}{m_{\text{tot}}} = \frac{-P + \pi_A}{m_{\text{tot}}} = \frac{-m_{\text{tot}} \cdot g + \pi_A}{m_{\text{tot}}} = -g + \frac{\pi_A}{m_{\text{tot}}}$$

$$a_z = -9,81 + \frac{2,9 \times 10^4}{2,8 \times 10^3} = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$$

$$a = \sqrt{a_z^2} = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$$

Comme  $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ , on primitive  $a_z$  pour exprimer  $v_z$ .

$$v_z(t) = 0,5 t + \text{Cte}$$

La vitesse initiale est nulle  $v_z(t=0) = 0,5 \times 0 + \text{Cte}$  donc  $\text{Cte} = 0$ .

$$v_z(t) = 0,5 t$$

Au bout de 10 s,  $v_z(t=10) = 0,5 \times 10 = 5 \text{ m.s}^{-1}$ .

Au bout d'une minute,  $v_z(t=60) = 0,5 \times 60 = 3 \times 10^1 \text{ m.s}^{-1}$

**Q7. Commenter les résultats obtenus à la question précédente et proposer une piste d'amélioration du modèle. On pourra s'appuyer sur les vitesses exprimées en km.h<sup>-1</sup>.**

On convertit les vitesses calculées en km.h<sup>-1</sup>.

Au bout de 10 s,  $v_z(t=10) = 0,5 \times 10 \times 3,6 = 18 \text{ km.h}^{-1} = 2 \times 10^1 \text{ km.h}^{-1}$

Au bout d'une minute,  $v_z(t=60) = 0,5 \times 60 \times 3,6 = 108 \text{ km.h}^{-1} = 1 \times 10^2 \text{ km.h}^{-1}$

Ces vitesses semblent beaucoup trop élevées donc en réalité l'accélération doit être plus faible.

Le modèle choisi donne :  $a_z = -g + \frac{\pi_A}{m_{\text{tot}}}$ .

Étudions les paramètres qui jouent un rôle sur l'accélération.

Si l'altitude augmente alors  $g$  diminue alors  $a_z$  est plus grande (si la poussée d'Archimède est constante). Cette évolution ne va pas dans le sens attendu. On ne garde pas cette hypothèse.

Concernant la poussée d'Archimède,  $\pi_A = \rho_{\text{ext}} \cdot V \cdot g$ , le modèle considère que sa valeur est constante. Mais la masse volumique de l'air diminue quand l'altitude augmente. Ainsi la poussée d'Archimède est de moins en moins grande et l'accélération diminue au cours de la montée.

Ceci est en accord avec des vitesses plus faibles.

Enfin le modèle n'a considéré que la poussée d'Archimède et le poids, mais les forces de frottement de l'air jouent sûrement un grand rôle et ainsi l'accélération est moins forte.

## 2. Une enveloppe de montgolfière plus performante

**Q8. Préciser, en justifiant, le sens du flux thermique à travers l'enveloppe simple couche du ballon.**

Le flux thermique va du milieu le plus chaud vers le milieu le plus froid, donc de l'intérieur de l'enveloppe vers l'extérieur.

**Q9. Calculer la valeur du flux thermique  $\phi_1$  à travers une enveloppe simple couche.**

$$\phi_1 = \frac{\theta_{\text{int}} - \theta_{\text{ext}}}{R_{th,1}}$$

$$\phi_1 = \frac{106 - 21}{3,0 \times 10^{-4}} = 2,8 \times 10^5 \text{ W} = 2,8 \times 10^2 \times 10^3 \text{ W} = 2,8 \times 10^2 \text{ kW}$$

Remarque : inutile de convertir les températures en Kelvins

$$\phi_1 = \frac{106 + 273 - (21 + 273)}{3,0 \times 10^{-4}} = \frac{106 + 273 - 21 - 273}{3,0 \times 10^{-4}} = \frac{106 - 21}{3,0 \times 10^{-4}}$$

**Q10. Le flux thermique  $\phi_2$  à travers l'enveloppe à double paroi est  $\phi_2 = 165 \text{ kW}$ . Commenter.**

$\phi_2$  est très inférieur à  $\phi_1$  donc grâce à la double paroi, le transfert thermique est fortement réduit. Ce qui est bien en accord avec l'énoncé.

## 3. Une gourde en aluminium à bord de la montgolfière

La loi de Newton donne l'expression du flux thermique  $\phi$  (en W) reçu par le système {gourde + boisson}, à la température  $\theta(t)$ , de la part de l'air extérieur, à la température  $\theta_{\text{ext}}$  :  $\phi = h.S.(\theta_{\text{ext}} - \theta(t))$ .

**Q11. Montrer que la température du système vérifie la relation :**

$$\theta(t + \Delta t) - \theta(t) = \frac{h.S.(\theta_{\text{ext}} - \theta(t)).\Delta t}{C}$$

$\phi = \frac{Q}{\Delta t}$  : le flux représente la quantité de chaleur échangée par unité de temps.

$$\text{Or } Q = C.(\theta(t + \Delta t) - \theta(t)), \text{ donc } \phi = \frac{C.(\theta(t + \Delta t) - \theta(t))}{\Delta t}$$

$$\text{ainsi } h.S.(\theta_{\text{ext}} - \theta(t)) = \frac{C.(\theta(t + \Delta t) - \theta(t))}{\Delta t}$$

$$\text{Et finalement } \theta(t + \Delta t) - \theta(t) = \frac{h.S.(\theta_{\text{ext}} - \theta(t)).\Delta t}{C}$$

À partir du résultat précédent, on montre que la température  $\theta(t)$  du système lors de son refroidissement vérifie l'équation différentielle suivante :  $\frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{\theta(t)}{\tau} = \frac{\theta_{ext}}{\tau}$  avec  $\tau = \frac{C}{h.S}$  le temps caractéristique du système.

L'équation différentielle précédente admet des solutions générales de la forme

$$\theta(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B.$$

**Q12. Déterminer les expressions littérales des constantes A et B en fonction de  $\theta_0$  et  $\theta_{ext}$  puis calculer leurs valeurs. Commenter.**

À la date  $t = 0$  s,  $\theta = \theta_0$ .

$$\text{Et } \theta(t=0) = A.e^{-\frac{0}{\tau}} + B = A + B \quad \text{donc } A + B = \theta_0.$$

Pour une durée très longue, le système est à la même température que le milieu extérieur donc  $\theta = \theta_{ext}$ .

$$\theta(t \rightarrow \infty) = A.e^{-\frac{\infty}{\tau}} + B = B$$

Ainsi  $B = \theta_{ext}$ .

$$B = 21^\circ\text{C}$$

On avait  $A + B = \theta_0$ .

$$A + \theta_{ext} = \theta_0$$

$$A = \theta_0 - \theta_{ext}$$

$$A = 48 - 21 = 27^\circ\text{C}$$

La modélisation numérique présentée sur le document 2 est en accord avec ces valeurs.

$$\theta(t) = 27xe^{(-0,000196xt)} + 21$$

**Q13. Déterminer la valeur du temps caractéristique à partir de la modélisation numérique de la figure 2.**

Par analogie entre  $\theta(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$  et la modélisation, on en déduit que  $-0,000196 = -\frac{1}{\tau}$

$$\text{Donc } \tau = \frac{1}{0,000196} = 5,10 \times 10^3 \text{ s}$$

**Q14. En déduire la valeur du coefficient  $h$  d'échange thermique surfacique, puis commenter le résultat obtenu avec les valeurs données dans le tableau ci-dessous.**

Conditions environnementales	Coefficient d'échange thermique surfacique entre l'air et une paroi solide en $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ .
Sans courant d'air	de 5 à 10
Avec courant d'air	de 10 à 500

$$\tau = \frac{C}{h.S}$$

$$h = \frac{C}{\tau.S}$$

$$h = \frac{2,1 \times 10^3}{5,10 \times 10^3 \times 0,042} = 9,8 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$$

Cette valeur comprise entre 5 et 10 est donc en accord avec les données du tableau pour des conditions environnementales sans courant d'air.

**Si vous avez repéré une erreur, merci de nous la signaler à [labolycee@labolycee.org](mailto:labolycee@labolycee.org)**